Diskrete Wahrscheinlichkeitsraum Ziehen von k aus n Elemente: geordnet n^k (mit Zurücklegen), $\frac{n!}{(n-k)!}$ (ohne); ungeordnet $\binom{n+k-1}{n-1}$ (mit), $\binom{n}{k}$ (ohne)

Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion $Pr[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \cdot \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} Pr[\bigcap_{i \in I} A_i]$

$n=2$ $Pr[A_1 \cup A_2] = Pr[A_1] + Pr[A_2] - Pr[A_1 \cap A_2]$

$n=3$ $Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = Pr[A_1] + Pr[A_2] + Pr[A_3] - Pr[A_1 \cap A_2] - Pr[A_1 \cap A_3] - Pr[A_2 \cap A_3] + Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$

$n=4$ $Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4] = Pr[A_1] + Pr[A_2] + Pr[A_3] + Pr[A_4] - Pr[A_1 \cap A_2] - Pr[A_1 \cap A_3] - Pr[A_1 \cap A_4] - Pr[A_2 \cap A_3] - Pr[A_2 \cap A_4] - Pr[A_3 \cap A_4] + Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3] + Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_4] + Pr[A_1 \cap A_3 \cap A_4] + Pr[A_2 \cap A_3 \cap A_4] - Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4]$

bedingte Wahrscheinlichkeit $Pr[A|B] = \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$ $Pr[A \cap B] = Pr[A|B] \cdot Pr[B] = Pr[B|A] \cdot Pr[A]$

$Pr[B|B]=1$, $Pr[A|\Omega] = Pr[A]$, $Pr[\emptyset|B]=0$, $Pr[\bar{A}|B] = 1 - Pr[A|B]$

Multiplikationssatz $Pr[A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n] = Pr[A_1] \cdot Pr[A_2|A_1] \cdot Pr[A_3|A_1 \cdot A_2] \cdot \ldots \cdot Pr[A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}]$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit $Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]$ (A_i paarweise disjunkt, $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$)

Unabhängigkeit $Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B] \iff Pr[A|B] = Pr[A]$ $Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = Pr[A_1] \cdot \ldots \cdot Pr[A_n]$

wenn A,B,C unabhängig, dann auch $A \cap B$, C unabhängig, auch $A \cup B$, C unabhängig

Satz von Bayes $Pr[A_i|B] = \frac{Pr[A_i \cap B]}{Pr[B]} = \frac{Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} Pr[B|A_j] \cdot Pr[A_j]}$ (ie $\{1,\ldots,n\}$, $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt)

Zufallsvariable

Dichte $f(x) = Pr[X=x]$, Verteilung $F(x) = Pr[X \leq x]$ $\sum_{x \in \Omega_X} f(x) = 1$

Erwartungswert $\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot Pr[X=x] = \sum_{i=1}^{\infty} Pr[X \geq i]$ (Monotonie: $X(\omega) \leq Y(\omega)\ \forall \omega \Rightarrow \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$)

$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in \Omega_X} x \cdot Pr[X=x|A]$ $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot Pr[A_i]$ (A_i disjunkte Partitionen von Ω)

Varianz $Var[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{x \in \Omega_X} (x - \mathbb{E}[X])^2 \cdot Pr[X=x] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = (\sum_{x \in \Omega_X} x^2 \cdot Pr[X=x]) - \mathbb{E}[X]^2$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{Var[X]}$ $Var[aX+b] = a^2 \cdot Var[X]$ $Var[X] = Var[-X]$

$\mathbb{E}[X^k]$ k-te Moment von X, $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ k-te zentrale Moment von X

Mehrere Zufallsvariable

gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y) = Pr[X=x, Y=y]$ gemeinsame Verteilung $F_{X,Y}(x,y) = Pr[X \leq x, Y \leq y]$

Randdichte $f_X(x) = \sum_{y \in \Omega_Y} f_{X,Y}(x,y)$ bzw. $f_Y(y) = \sum_{x \in \Omega_X} f_{X,Y}(x,y)$

Randverteilung $F_X(x) = \sum_{x' \leq x} \sum_{y \in \Omega_Y} f_{X,Y}(x',y)$ bzw. $F_Y(y) = \sum_{y' \leq y} \sum_{x \in \Omega_X} f_{X,Y}(x,y')$ $\sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} f_{X,Y}(x,y) = 1$

Unabhängigkeit von Zufallsvariable $Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot Pr[X_n = x_n]$

$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$, $F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$ ($X_1, \ldots, X_n$ unabhängig)

Zusammengesetzte Zufallsvariable (Satz 49 Faltungsformel) X, Y unabhängig, $Z = X+Y$, dann gilt $f_Z(z) = \sum_{x \in \Omega_X} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)$

Linearität des Erwartungswerts $\mathbb{E}[a_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n] = a_0 + a_1 \mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n]$

Multiplikativität des Erwartungswerts $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$ ($X_1, \ldots, X_n$ unabhängig)

Additivität der Varianz $Var[X_1 + \ldots + X_n] = Var[X_1] + \ldots + Var[X_n]$ (nur für $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig)

Indikatorvariable $I_A = \begin{cases} 1 & \text{falls A eintritt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\Rightarrow \mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot Pr[A] + 0 \cdot Pr[\bar{A}] = Pr[A]$

$\mathbb{E}[I_{A_1} \cdot \ldots \cdot I_{A_n}] = Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$

Wichtige Reihen ($|x| < 1$)

① geometrische Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ ② Ableitung der geometrischen Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

③ Binomialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot x^k = (1+x)^n$ ④ 2-te Ableitung der geometrischen Reihen $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$

5) Binomische Formel $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$ 6) Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot x^k = e^k$ 7) $\lim_{n \to \infty} (1 - \frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$

8) geometrische Summe $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ⑨ Reihendarstellung von ln $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=3}^{n+1} i = (n+1-3+1) \cdot i$, $\ln(\prod_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$, $\prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot e^{-\lambda x_i} = \lambda \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$

Konvexkombination $Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ und $\lambda_i \geq 0$ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\ln(1) = 0$ $\ln(e) = 1$

Gleichverteilung 0,5-Quantil $F_X(x_{0,5}) = \frac{x-a}{b-a} = 0,5 \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$ $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

Verteilungen

1) Bernoulli $\mathbb{E}[X] = p$ $Var[X] = p(1-p)$ $f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x=1 \\ 1-p & \text{für } x=0 \end{cases}$ $F_X(x) = 1-p$ für $0 \leq x \leq 1$ $Bin(n;p)$ $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} - 1$

2) Binomial $\mathbb{E}[X] = np$ $Var[X] = np(1-p)$ $f_X(x) = b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ $F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $\sum_{y=k}^{n} y = \frac{(n-k+1)(n+k)}{2}$

$X = X_1 + \ldots + X_n$ Summe der Bernoulli-verteilte Zufallsvariable. X ist binomialverteilt $\sum_{x=s}^{\infty} (\frac{1}{2})^{x-c} = \sum_{x=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{x-c+5}$ verteilt)

3) Geometrisch Geo(p) $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ $Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$ $f_X(x) = p(1-p)^{x-1}$ $F_X(x) = 1 - (1-p)^x$

Experiment solange wiederholt bis Erfolg mit p eintritt (jede Versuch wieder Bernoulli

Gedächtnislosigkeit $Pr[X > y+x | X > x] = Pr[X > y] = (1-p)^y$ (X geometrisch mit p)

4) negativ geometrisch $f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} p^n (1-p)^{z-n}$

$Z = X_1 + \ldots + X_n$ Summe der geometrisch Verteilungen (Anzahl an Versuche bis n-te Erfolg)

5) Poisson $Po(\lambda)$ $\mathbb{E}[X] = \lambda$ $Var[X] = \lambda$ $f_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ $F_X(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}$

Anzahl an Ereignisse, welche mit konstante Rate und unabhängig voneinander in einem Zeitintervall eintritt

Poisson Verteilung mit $\lambda = np$ als Grenzwert der Binomial Verteilung $b(k;n,p)$ $n \to \infty$

X, Y unabhängig $X \sim Po(\lambda)$ und $Y \sim Po(\mu)$ $Z = X+Y \sim Po(\lambda+\mu)$

6) Coupon-Collector-Problem: erwartet Anzahl der Ziehungen, bis jedes Element mindestens einmal gezogen (geometrisch verteilt mit $p = \frac{n-i+1}{n}$) $\mathbb{E}[X] = n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = n \cdot H_n$

achsensymmetrisch, gerade $f(-x) = f(x)$

punktsymmetrisch, ungerade $f(-x) = -f(x)$

Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

Markov-Ungleichung $Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$ $\iff Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$ $(t>0)$

Chebychef-Ungleichung $Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{Var[X]}{t^2}$ $\iff Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{Var[X]}] \leq \frac{1}{t^2}$

Gesetz der großen Zahlen $n \geq \frac{Var[X]}{\varepsilon \delta^2} \Rightarrow Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon$ ($X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, $Z = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$)

Chernoff-Schranken ($X_1, \ldots, X_n$ unabhängig Bernoulli verteilte Zufallsvariable, $X = X_1 + \ldots + X_n$, $0 < \varepsilon \leq 1$)

1) upper tail $Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \leq e^{-\mu \frac{\delta^2}{3}}$ 2) lower tail $Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} \leq e^{-\mu \frac{\delta^2}{2}}$

(nach oben abschätzen)

Erzeugende Funktion $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr[X=k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X]$

1) Bernoulli $G_X(s) = (1-p) \cdot s^0 + p \cdot s^1 = 1 - p + ps$

2) Gleichverteilung $G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \cdot s^k = \frac{s^{n+1} - 1}{(n+1)(s-1)}$

3) Binomial $G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k = (1 - p + ps)^n$

4) Geometrisch $G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} s^k = ps \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)s)^{k-1} = \frac{ps}{1-(1-p)s}$

5) Poisson $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot s^k = e^{-\lambda + \lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$

Momenterzeugende Funktion $M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}[(e^s)^X] = G_X(e^s) = e^{su + (s\sigma)^2/2}$

Zusammenhang zwischen erzeugenden Funktionen und Momenten

1) $G_X'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot Pr[X=k] \cdot s^{k-1} = \mathbb{E}[X^s]$ 2) $G_X'(0) = Pr[X=1]$ 3) $G_X^{(i)}(0) = Pr[X=i] \cdot i!$

4) $\frac{G_X^{(i)}(0)}{i!} = Pr[X=i]$ 5) $G_X'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot Pr[X=k] = \mathbb{E}[X]$ 6) $Var[X] = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$

achsensymmetrisch $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

punktsymmetrisch $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$ $e^x = a$ $x = \ln(a)$

$\log(x/y) = \log(x) - \log(y)$ $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$

$(a^x)' = a^x \ln(a)$ $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \subseteq P(\Omega)$ heißt σ-Algebra, falls ① $\Omega \in A$, ② $A \in A \Rightarrow \bar{A} \in A$, ③ $\forall n \in \mathbb{N}\ A_n \in A \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in A$

Es gilt automatisch, dass $\emptyset \in A$ und $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n \in A$

$\bar{X}$ mit einem Konfidenzniveau von 0,9 höchstens 1 Grad von μ abweicht

$Pr[|\bar{X} - \mu| \leq 1] = Pr[-1 \leq \bar{X} - \mu \leq 1] \geq 0,9$

möglichst kleines Konfidenzintervall $[\bar{X} - c, \bar{X} + c]$, auf das man die durchschnittliche Temperatur μ mit einem Konfidenzniveau von 0,9 eingrenzen kann

μ befindet sich genau dann in Konfidenzintervall $[\bar{X} - c, \bar{X} + c]$, falls $|\bar{X} - \mu| \leq c$ gilt

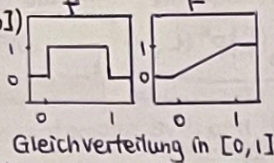
$Pr[|\bar{X} - \mu| \leq c] = Pr[-c \leq \bar{X} - \mu \leq c] \geq 0,9$

kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsraum Punktwahrscheinlichkeit $Pr[X=c]=0$

kontinuierliche Dichte $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ kontinuierliche Verteilung $F_X(x) = Pr[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

Gleichverteilung $\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ $Var[X] = \frac{(a-b)^2}{12}$ $U([a,b])$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$



Gleichverteilung in $[0,1]$

Simulation von Zufallsvariable $\tilde{X} = F_X^{-1}(u) \Rightarrow F_{\tilde{X}}(t) = F_X(t)$ (U gleichverteilt)

Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t)\,dt$ $\mathbb{E}[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t)\,dt$ $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f(t)\,dt < \infty$

Varianz $Var[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t)\,dt = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ $\int_{-\infty}^{\infty} |x^2| \cdot f(t)\,dt < \infty$

Unabhängigkeit $Pr[X \le x, Y \le y] = Pr[X \le x] \cdot Pr[Y \le y] \Leftrightarrow F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

Summe unabhängiger Zufallsvariable $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,dx$ $(Z = X+Y)$

k-te Momente von X $\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f_X(x)\,dx$

Normalverteilung symmetrisch zu μ

Normalverteilung $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mathbb{E}[X] = \mu$ $Var[X] = \sigma^2$

→ Dichte $f_X(x) = \varphi(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ $Pr[X \le \mu] = Pr[X > \mu] = \frac{1}{2}$

→ Verteilung (Gauß'sche Φ-Funktion) $F_X(x) = \Phi(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ $\Phi(-z_\alpha) = 1-\alpha$ $-z_\alpha = z_{1-\alpha}$

Standardnormalverteilung $X \sim N(0,1)$ $\mathbb{E}[X] = \mu = 0$ $Var[X] = \sigma^2 = 1$

→ Dichte $\varphi(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ Verteilung $\Phi(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

Lineare Transformation der Normalverteilung $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ und $Y = aX+b$ normalverteilt $\Rightarrow Y \sim N(a\mu+b, a^2\sigma)$

Normieren $Pr[a < x \le b] = Pr\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Y = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Additivität von Normalverteilung $Z = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ mit $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \Rightarrow Z \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\mu = a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n$, $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2$

Zentraler Grenzwertsatz
- $X_1, \dots, X_n$ bernoulliverteilt mit μ, σ^2
- $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ (X_i unabhängig)
- $n \ge 1$

$\Rightarrow Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $n=1$: $\Xi_i = \frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma} \sim N(0,1)$

$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ $Pr[Y_{108} > 705] = Pr\left[\frac{Y_{108}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} > \frac{705-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right]$

Grenzwertsatz von de Moivre
- $X_1, \dots, X_n \sim Ber(p)$ mit p
- $H_n = X_1 + \dots + X_n$ (X_i unabhängig)
- $n \ge 1$

$\Rightarrow Z_n = \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$

$\max\{x,y\} + \min\{x,y\} = x+y$

$\max\{x,y\} = x + y - \min\{x,y\}$

Exponentialverteilung $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$ $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}$

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow aX \sim Exp(\frac{\lambda}{a})$

Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow Pr[X > x+y \mid X > y] = Pr[X > x]$

Minimum
- $X_1, \dots, X_n \sim Exp(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (X_i unabhängig)
- $X = \min\{X_1, \dots, X_n\}$

$\Rightarrow X \sim Exp(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$ absorbierende zustand ist rekurrent, nicht transistent

Exponentialverteilung $Y_n = \frac{1}{n} X_n$: $\lim_{n\to\infty} Pr[Y_n \le t] = 1 - e^{-\lambda t}$ als Grenzwert der geometrisch Verteilung mit $p_n = \frac{\lambda}{n}$

mehrere kontinuierliche Zufallsvariable

gemeinsame Dichte $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

gemeinsame Verteilung $F_{X,Y}(x,y) = Pr[X \le x, Y \le y] = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$

Randdichte $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$ Randverteilung $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\,dv\,du$

Unabhängigkeit $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$ $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$ ($X_1,\dots,X_n$ unabhängig)

Poisson Prozess: X_i unabhängig exponential verteilt $X(t) = \max\{n \mid \sum_{i=1}^{n} X_i \le t\}$

Anzahl der Ereignisse bis Zeitpunkt t. $X(t)$ mit Parameter $t \cdot \lambda$ poisson verteilt

transient: wenn Prozess mit positive Wahrscheinlichkeit nie mehr in den Zustand zurückkehrt

---

Induktive Statistik Zufallsvariable X mit Dichte $f(x;\theta)$ Schätzvariable/Schätzer U

erwartungstreu für θ: $\mathbb{E}[U] = \theta$, $Bias[U] = \mathbb{E}[U-\theta] = 0$

mean Square Error (MSE) $MSE_U = \mathbb{E}[(U-\theta)^2] \overset{U \text{ erwartungstreu}}{=\!=} \mathbb{E}[(U-\mathbb{E}[U])^2] = Var[U]$

A effizienter als B wenn $MSE_A < MSE_B$ Effizienz maximieren $\Leftrightarrow$ Varianz minimieren

Schätzer konsistent im quadratischen Mittel wenn $\lim_{n\to\infty} MSE = 0$ (n = Stichproben Umfang)

Stichprobenmittel $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ (erwartungstreu Schätzer für Erwartungswert)

Stichprobenvarianz $S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ (erwartungstreu Schätzer für Varianz)

$\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_i] = \mu$

$Var[\bar{X}] = Var[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = (\frac{1}{n})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Maximum-Likelihood-Methode $L(x_1,\dots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} Pr_\theta[X_i = x_i] \overset{\text{unabhängig}}{=} Pr_\theta[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$

1) bestimmen $g(\theta) = \ln(L(x_1,\dots,x_n;\theta))$
2) erste Ableitung $g'(\theta) = 0$ $\Rightarrow$ Nullstelle θ_0 bekannt
3) zweite Ableitung $g''(\theta_0) < 1$ $\Rightarrow$ Maximum
4) θ_0 ist ML-Schätzer

ML-Schätzer $X_1, \dots, X_n \sim$ □

$Bin(N,\theta)$	$T = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
$Geo(\theta)$	$T = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\bar{x}_n}$
$Po(\theta)$	$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{x}_n$
$Exp(\theta)$	$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \bar{x}_n$
$U([\theta_1,\theta_2])$	$T_{\theta_1} = \max(X_i)$; $T_{\theta_2} = \min(X_i)$
$N(\theta_1,\theta_2)$	$T_{\theta_1} = \bar{x}_n$, $T_{\theta_2} = S^2$

Konfidenzintervall $I = [U_1, U_2]$ sodass Konfidenzniveau $Pr[U_1 \le \theta \le U_2] \ge 1-\alpha$

symmetrisch Konfidenzintervall $[\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$

sodass $Pr[\mu-\varepsilon \le X \le \mu+\varepsilon] = Pr[-\frac{\varepsilon}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\varepsilon}{\sigma}] = \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - \Phi(-\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - 1 = 0{,}6$

x_γ mit $F_X(x_\gamma) = \gamma$ heißt γ-Quantil von X. z_γ = Quantile von Standardnormalverteilung

wir erhalten $\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) = 0{,}8$ sodass $\frac{\varepsilon}{\sigma}$ das 0,8 Quantile der Standardnormalverteilung ist.

Tabellennachschlag ergibt $z_{0,8} = 0{,}84$. somit $\varepsilon = \sigma \cdot 0{,}84 = \frac{5}{4} \cdot 0{,}84 = 1{,}05$ $(\mu = 4, \sigma = \frac{5}{4})$

gesuchte Intervall $[4-1{,}05, 4+1{,}05] = [2{,}95, 5{,}05]$

Hypothesen-Test T Testgröße, K Ablehnungsbereich, H_1 Ablehnung des H_0 (Alternative)

H_0 zu überprüfende Nullhypothese

Fehler 1. Art: H_0 gilt wird aber abgelehnt α-Fehler (Signifikanzniveau) $\alpha = \sup_{p \in H_0} Pr_p[T \in K]$

Fehler 2. Art: H_0 wird nicht abgelehnt, obwohl H_1 gilt β-Fehler $\beta = \sup_{p \in H_1} Pr_p[T \notin K]$

$h = X_1 + \dots + X_n$ Ablehnungskriterium für H_0

Approximierte Binomialtest $X \sim Bin(n,p)$ $z = \frac{h - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$ $H_0: p \ge p_0$ $H_1: p < p_0$

- $|z| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$
- $z < z_\alpha$
- $z > z_{1-\alpha}$

Gaußtest $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$ σ bekannt $\mathbb{E}[X] = \mu$ $Var[X] = \sigma^2$

t-Test $T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S}\sqrt{n}$ $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\mathbb{E}[X] = \mu$ σ bekannt $Var[X] = \sigma^2$

- $|T| > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$
- $T < t_{n-1,\alpha}$
- $T > t_{n-1,1-\alpha}$

χ^2-Anpassungstest $T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i}$

- $T > \chi^2_{k-1,1-\alpha}$ $W_X = \{1,\dots,k\}$
- $H_0: Pr[X=i] = p_i$ für $i \in \{1,\dots,k\}$
- $H_1: Pr[X=i] \ne p_i$ für $i \in \{1,\dots,k\}$

Übergangswahrscheinlichkeit

erwartete Übergangszeit $h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}] = 1 + \sum_{k \ne j} p_{ik} h_{kj}$ $\forall i,j \in S, i \ne j$

Ankunftswahrscheinlichkeit $f_{ij} = Pr[T_{ij} < \infty] = p_{ij} + \sum_{k \ne j} p_{ik} f_{kj}$ $\forall i,j \in S, i \ne j$

erwartete Rückkehrzeit $h_i = \mathbb{E}[T_j] = 1 + \sum_{k \ne j} p_{ik} h_{kj}$

Rückkehrwahrscheinlichkeit $f_i = Pr[T_i < \infty] = p_{ii} + \sum_{k \ne j} p_{ik} f_{ki}$

Absorbierende Zustände: Zustand i mit $\forall j \ne i$ $p_{ij} = 0$, $p_{ii} = 1$, $f_{ij} = 0$

transistente Zustände: Zustand i mit $f_i < 1$, rekurrente Zustände: Zustand i mit $f_i = 1$

irreduzible Markov-kette: Stark zusammenhängend → jede Zustand vom jeden anderen Zustand mit positive Wahrscheinlichkeit erreichbar

aperiodische Markov-Kette: wenn alle Zustände aperiodisch (ein Zustand aperiodisch → entweder besitzt Schleife oder mindestens 2 geschlossene Weg-Länge teilerfremd $ggT(w_1,w_2) = 1$)

irreduzible + aperiodische Markov-kette = ergodische Markov-kette

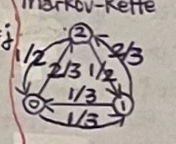
Stationäre Verteilung: Einen Zustandsvektor π mit $\pi = \pi \cdot P$, indem P Übergangsmatrix ist (eindeutig)

Fundalmentalsatz für ergodische Markov-kette: für jede endliche Markov-kette $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ gilt unabhängig vom Startzustand: $\lim_{n\to\infty} q_n = \pi$ wobei π die eindeutige stationäre Verteilung der kette bezeichnet

irreduzible endliche markov-kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung π, es gilt $\pi_j = \frac{1}{h_j}$ für alle $j \in S$ (Satz 136)

ergodisch endlich + doppelstochastisch $\lim_{t\to\infty} q_t = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ Satz 144

Markov-kette



Übergangsmatrix P

	0	1	2
0	0	1/3	2/3
1	1/3	0	2/3
2	1/2	1/2	0

stationäre Verteilung $\pi \cdot P = \pi$ $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$

$$(\pi_0\ \pi_1\ \pi_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_0 \\ \frac{1}{3}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{2}{3}\pi_0 + \frac{2}{3}\pi_1 = \pi_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \pi = (\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10})$ zum Zeitpunkt $t \to \infty$ mit Wahrscheinlichkeit $\pi_2 = \frac{4}{10}$ auf Zustand 2

$q_{t+k} = q_t \cdot P^k$

$q_t = q_{t-1} \cdot P$