rot: Kapitel, blau: Themen, grün: Begriffe, grau: Kommentare.

Allgemeines

Mitternachtsformel. Für $a,b,c\in\mathbb{R}$ gilt: $ax^2+bx+c=0 \iff x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Potenzen und Logarithmen. Für $a,b,c\in\mathbb{R}$ mit $a\neq 0, b,c>0, b,c\neq 1$ gilt: $\log_c b=a \iff c^a=b \iff \sqrt[a]{b}=c$.

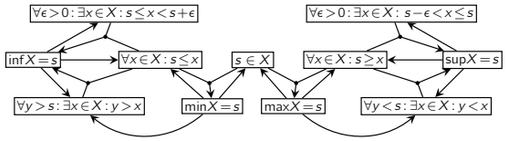
Nicht vergessen! $a^b:=e^{b\ln(a)}$.

Logarithmusregeln. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$, $\log_a(n\cdot m)=\log_a n+\log_a m$, $\log_a\frac{n}{m}=\log_a n-\log_a m$, $\log_a n^m=m\cdot\log_a n$, $\log_{a^b} n=\frac{1}{b}\cdot\log_a n$, $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$, $\log_a a^n=n$, $\log_a\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}$.

Bernoulli-Ungleichung. $\forall n>0, x\geq -1\colon (1+x)^n\geq 1+nx$.

1. Reelle Zahlen

Obere und untere Schranken. Für einen angeordneten Körper K, $X\subset K$ und $s\in K$ gilt:



Pfeile bedeuten $A\implies B$ bzw. $A\wedge B\implies C$.

Rechenregeln für Suprema.

1. $\sup(X+Y)=\sup(X)+\sup(Y)$
2. $\lambda>0\implies \sup(\lambda X)=\lambda\sup(X)$
3. $X,Y\subset[0,\infty)\implies \sup(X\cdot Y)=\sup(X)\cdot\sup(Y)$
4. $X\subset Y\implies \sup(X)\leq\sup(Y)$

2. Folgen in $\mathbb{R}$

Beschränktheit. (a_n) ist **nach oben beschränkt**, falls $\exists C\in\mathbb{R}\colon\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n<C$, **nach unten beschränkt**, falls $\exists C\in\mathbb{R}\colon\forall n\in\mathbb{N}\colon a_n>C$ und **beschränkt**, falls $\exists C>0\colon\forall n\in\mathbb{N}\colon |a_n|<C$ bzw. falls nach unten und oben beschränkt.

Grenzwert. (a_n) **konvergiert** gegen a ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ oder $a_n\to a$ für $n\to\infty$), falls $\forall\epsilon>0\colon\exists n_0\in\mathbb{N}\colon\forall n\geq n_0\colon |a_n-a|<\epsilon$. Wenn kein solches a existiert, dann **divergiert** sie.

Beispiele. Für $n\to\infty$ gilt: $\frac{1}{n^p}\to 0$ $(p\in\mathbb{N})$, $\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}$, $x^n\to 0$ $(0<x<1)$ und $(1+\frac{1}{n})^n\to e$. Es divergiert: $(-1)^n$.

Rechenregeln für Grenzwerte. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, dann:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n=a+b$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=a\cdot b$,
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$ (falls $b\neq 0$),
4. $a_n\leq b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}\implies a\leq b$,
5. **Einschließungskriterium**: $a=b$ und $a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}\implies\lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$.

Uneigentliche Konvergenz. Eine divergente Folge (a_n) **konvergiert uneigentlich** gegen ∞ (bzw. $-\infty$), falls $\forall K>0\colon\exists n_0\in\mathbb{N}\colon\forall n\geq n_0\colon a_n>K$ (bzw. $a_n<-K$). Notation wie bei Konvergenz.

Beispiele. n^2, x^n $(x>1)$ und $\frac{n^2-1}{n}$ konvergieren uneigentlich gegen ∞.

Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte. Falls $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, dann:

1. $a\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}\implies\lim\limits_{n\to\infty} a_n+b_n=\infty$,
2. $a\in\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}\implies\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=\infty$ und $a\in\mathbb{R}^-\cup\{-\infty\}\implies\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=-\infty$
3. $a\in\mathbb{R}\implies\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

Bei 3. reicht es, dass (a_n) beschränkt ist.

Monotonie von Folgen. Eine reelle Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, falls $\forall n\in\mathbb{N}\colon a_{n+1}\geq a_n$. Analog **monoton fallend** für $\leq$, **streng monoton wachsend** für $>$ und **streng monoton fallend** für $<$.

Häufungspunkt.

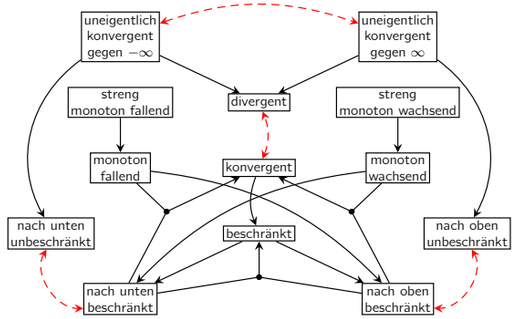
1. Falls $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend oder fallend, dann $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Eine Zahl $a\in\mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $\exists$ Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Wichtige Aussagen:

- **Bolzano-Weierstrass**: (a_n) beschränkt $\implies$ (a_n) hat mindestens einen Häufungspunkt,
- (a_n) monoton fallend oder wachsend $\implies$ (a_n) hat höchstens einen Häufungspunkt,
- (a_n) konvergent $\implies$ (a_n) hat genau einen Häufungspunkt (= Grenzwert),
- (a_n) uneigentlich Konvergent gegen $-\infty$ oder ∞ $\implies$ (a_n) hat keinen Häufungspunkt.

Limes superior und limes inferior. Falls (a_n) nach unten (bzw. oben) beschränkt ist, ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (bzw. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) sein größter (bzw. kleinster) Häufungspunkt.

Eigenschaften. Für eine reelle Folge (a_n) gilt:



Schwarze Pfeile bedeuten $A\implies B$ bzw. $A\wedge B\implies C$ und rote $\neg A\vee\neg B$, d. h. A und B schließen sich gegenseitig aus.

3. Folgen in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$

Komplexe Zahlen. $\mathbb{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R}\}$. Für $z=a+bi$ gilt:

- **Konjugierte**: $\overline{z}=a-bi$.
- **Betrag**: $|z|=\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.
- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ und $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.
- **Dreiecksungleichungen**: $||z_1|-|z_2||\leq|z_1\pm z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

Für $z_1=a_1+b_1i$ und $z_2=a_2+b_2i$ gilt:

- **Addition**: $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$,
- **Subtraktion**: $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$,
- **Multiplikation**: $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$,
- **Division**: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)+\left(\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right)i$.

Jede komplexe Zahl $z=a+bi$ mit $z\neq 0$ lässt sich eindeutig in die **Polarform** $z=re^{\varphi i}$ bringen. Es gilt:

- $a=r\cos(\varphi)$,
- $b=r\sin(\varphi)$,
- $r=\sqrt{a^2+b^2}$ und
- $\varphi=\begin{cases}\arccos(a/r) & \text{falls } b\geq 0\\ -\arccos(a/r) & \text{sonst}\end{cases}$

Beschränktheit. $(z_n)=(a_n+ib_n)$ ist **beschränkt**, falls $\exists C>0\colon\forall n\in\mathbb{N}\colon|z_n|<C$ bzw. falls a_n und b_n beschränkt sind.

Grenzwert. Die Definition der Eigenschaften **konvergent** und **divergent** sind in $\mathbb{C}$ identisch wie in $\mathbb{R}$ (s. Kapitel 2).

Eigenschaften. Die Eigenschaften **konvergent**, **divergent** und **beschränkt** haben dieselben Beziehungen wie bei reellen Folgen (s. Bild). Die restlichen Eigenschaften können für Folgen in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$ nicht definiert werden.

4. Reihen

Konvergenzkriterien. Sei (a_n) eine komplexe (oder reelle) Zahlenfolge.

- **Nullfolgenkriterium**. Es gilt: a_n konvergiert nicht gegen Null $\implies\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.
- **Majoranten- und Minorantenkriterium**. Sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge mit $|a_n|\leq b_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt:
  1. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\implies\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut,
  2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert $\implies\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert.
- **Quotientenkriterium**. Falls $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und $a_n\neq 0$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$, dann gilt:
  1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1\implies\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut,
  2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1\implies\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.
- **Wurzelkriterium**. Es gilt:
  1. $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1\implies\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut,
  2. $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1\implies\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.
- **Leibniz-Kriterium**. Falls (a_n) reell und monoton fallend, dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0\implies\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert.

Folgende Reihen konvergieren und können als Majoranten benutzt werden:

- $\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}$ (für $|z|<1$)
- **Teleskopreihe**: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$
- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ (konvergiert für $s\in\mathbb{Q}, s\geq 2$)
- **Exponentialreihe**: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z$ (für alle $z\in\mathbb{C}$)
- **Logarithmusreihe**: $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$ (für $x\in(-1,1]$)

Folgende Reihen divergieren und können als Minoranten benutzt werden:

- $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ (divergiert für $|z|\geq 1$)
- **Harmonische Reihe**: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$

Potenzreihe. $P(z):=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$; $c_k\in\mathbb{C}; z\in\mathbb{C}$. Für den **Konvergenzradius** $R:=\frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}}$ gilt:

- $|z|<R\implies P(z)$ konvergiert,
- $|z|>R\implies P(z)$ divergiert.

Cauchy-Produkt.

1. Für absolut konvergente, komplexe Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gilt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ mit $c_m=\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$.
2. Für Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ mit Konvergenzradien R_a und R_b ist $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ mit $c_m=\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\min\{R_a,R_b\}$.

Exponentialfunktion. Es gilt $\exp(x)=e^x$ und für $\forall z,w\in\mathbb{C}, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$:

- $\exp(z):=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$
- $\exp(z+w)=\exp(z)\cdot\exp(w)$,
- $\exp(-z)=\frac{1}{\exp(z)}$, $\exp(z)\neq 0\wedge\exp(\overline{z})=\exp(z)$,
- $\left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\leq 2\cdot\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n=\exp(z)$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^{-n}}=\infty$,
- $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$, $e^{z+2\pi i}=e^z$,
- $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$, $|e^{ix}|=1$.

Trigonometrische Funktionen.

- $\sin(x):=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sum_{k=0}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$,
- $\cos(x):=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\sum_{k=0}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$,
- $\tan(x):=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,
- $\sin(z+w)=\sin(z)\cos(w)+\cos(z)\sin(w)$,
- $\sin(2z)=2\sin(z)c\cos(z)$,
- $\cos(z+w)=\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)$,
- $\cos(x)=Re(e^{ix})$, $\sin(x)=Im(e^{ix})$,
- $\cos(2z)=\cos^2(z)-\sin^2(z)$,
- $\sin^2(z)+\cos^2(z)=1$.

Umkehrfunktionen trigonometrischer Funktionen.

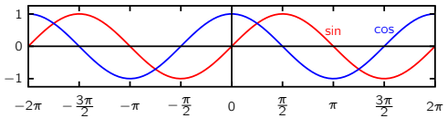
- $\arcsin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}$,
- $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)$,
- $\arctan(x)=\sum_{k=0}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Hyperbelfunktionen.

- $\sinh(x):=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}\frac{x^{2k+1}}{(2n+1)!}$,
- $\cosh(x):=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{k=0}\frac{x^{2k}}{(2n)!}$,
- $\tanh(x):=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$,
- $\cosh^2(x)=\frac{1}{2}\cosh(x)+\frac{1}{2}$,
- $\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1$.

Werte von Sinus und Kosinus

	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sin	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
cos	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1



5. Stetigkeit

Defintion. $f:D\to\mathbb{R}$ stetig in $c\iff\forall(x_n)$ mit $\lim\limits_{x\to 0} x_n=c$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} f(x_n)=f(c)$

Rechenregeln. $D\subseteq\mathbb{R}; f,g:D\to\mathbb{R}; f,g$ stetig in $c\Rightarrow f+g, f\cdot g, \frac{f}{g}$ $(g\neq 0)$ stetig in c

Komposition. $D,D'\subseteq\mathbb{R}, f:D\to\mathbb{R}$ stetig in c

- $y:=f(c)\in D'\wedge g$ stetig in $y\Rightarrow(g\circ f):D\to\mathbb{R}$ stetig in c
- f,g stetig $\wedge f(D)\subseteq D'\Rightarrow(g\circ f):D\to\mathbb{R}$ stetig

ε-δ-Charakterisierung. $D\subseteq\mathbb{R}, f:D\to\mathbb{R}, c\in D\Rightarrow f$ stetig in $c\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\colon\forall x\in D\colon|x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\varepsilon$

Zwischenwertsatz. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow\forall y\in\mathbb{R}$ mit $\min\{f(a),f(b)\}\leq y\leq\max\{f(a),f(b)\}\colon\exists x\in[a,b]\colon f(x)=y$

Satz von Maximum und Minimum. Für $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig gilt: f ist beschränkt und f nimmt in $[a,b]$ Maximum und Minimum an, d.h. $\exists x_{\max},x_{\min}\in[a,b]\colon f(x_{\max})=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}\wedge f(x_{\min})=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}$.

Stetigkeit in $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^n$. wörtlich übertragbar. $D\subseteq\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen: $\forall f$ stetig $:D\to\mathbb{C}$ bzw. $f:D\to\mathbb{R}^m$ beschränkt und nimmt auf D Maximum und Minimum an

Stetigkeit von Potenzreihen. $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k\Rightarrow f:\{z:|z|<R\}\to\mathbb{C}$ stetig

6. Differentiation

Definition Ableitung. Für $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ und $c\in(a,b)$ gilt: $f'(c):=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$.

Spezielle Ableitungen.

$f(x)$	c	x^c	e^x	$\ln(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$f'(x)$	0	cx^{c-1}	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$

$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\operatorname{artanh}(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{1-x^2}$

Alternative Darstellung: $\tan'(x)=1+\tan(x)^2$.

Ableitungsregeln.

- **Summenregel**: $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$.
- **Faktorregel**: $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$.
- **Produktregel**: $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.
- **Quotientenregel**: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$.
- **Kettenregel**: $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Sei $f\colon A \to B$ eine beliebige Funktion. Dann gilt:

- f **injektiv** $\iff$ Für jedes $y \in B$ gibt es höchstens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.
- f **surjektiv** $\iff$ Für jedes $y \in B$ gibt es mindestens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.
- f **bijektiv** $\iff$ f injektiv und surjektiv $\iff$ Für jedes $y \in B$ gibt es genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ $\iff$ Es existiert eine Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Für A Intervall und f stetig gilt:

- f **injektiv** $\iff$ f streng monoton wachsend oder streng monoton wachsend.
- f bijektiv $\implies$ f^{-1} auch **stetig**.

Für f differenzierbar und A offenes Intervall gilt:

- $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in A \iff f$ **monoton wachsend**.
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in A \implies f$ **strengmonoton wachsend**.
- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in A \iff f$ **monoton fallend**.
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in A \implies f$ **streng monoton fallend**.

falls f stetig ist, dann kann man oft die **Surjektivität** mit dem Zwischenwertsatz beweisen.

Ableitung von Umkehrfunktionen. Falls f bijektiv und differenzierbar, dann gilt: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

7. Anwendungen der Differentialrechnung

Extrempunkte. Für $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in (a,b)$ gilt:

- $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0 \implies x$ ist **lokales Minimum**,
- x ist **lokales Minimum** $\implies f'(x) = 0$ und $f''(x) \geq 0$,
- $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0 \implies x$ ist **lokales Maximum**,
- x ist **lokales Maximum** $\implies f'(x) = 0$ und $f''(x) \leq 0$.

Satz von Rolle. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in (a,b)\colon f'(\xi) = 0$.

Mittelwertsatz der Differentialrechnung. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\implies \exists \xi \in (a,b)\colon f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Landau-Symbole. Für $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gilt:

- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to c \iff \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$,
- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to c \iff$ es gibt ein $K > 0$, so dass für jede Folge $(x_n) \to c$ und fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|f(x_n)| \leq K \cdot |g(x_n)|$.

Vielleicht hilfreich (aus Wikipedia): $\lim_{x\to c} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty \implies f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to c$.

Satz von l'Hospital. Seien $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$ und entweder $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ oder $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \infty$. Falls $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann gilt: $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

8. Integration

Wichtige Beziehungen. Für $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$f \text{ diff'bar} \implies f \text{ stetig} \implies f \text{ beschränkt} \implies f \text{ integrierbar}$$

Eigenschaften integrierbarer Funktionen. Für $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

1. **Linearität**: $\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$,
2. **Additivität**: $\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,
3. **Monotonie**: $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b] \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$,
4. **Zerlegbarkeit**: $c \in (a,b) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mittelwertsatz der Integralrechnung. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\implies \exists \xi \in [a,b]\colon \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Stammfunktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

1. $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ist eine Stammfunktion von f.
2. Für jede Stammfunktion F von f gilt: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=a}^b$.

Spezielle Stammfunktionen.

$f(x)$	c	x^c	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$F(x)$	cx	$\frac{x^{c+1}}{c+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$x\ln(x) - x$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$

Hier ist $F(x)$ nur eine mögliche Stammfunktion von $f(x)$!

Integrationsregeln.

- **Partielle Integration**: $\int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$.
- **Substitutionssregel.** $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int f(y)\,\mathrm{d}y\right]_{y=g(x)}$. Rezept: 1. Ersetze überall $g(x)$ durch y. 2. Schreibe $\int \cdots \mathrm{d}x$ in $\int \cdots \frac{\mathrm{d}y}{\dot{y}}$ um und kürze alle übrigen x weg.

Typische Stammfunktionen

- $\int f(x)\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\int y\,\mathrm{d}y\right]_{y=f(x)} = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{y=f(x)} = \frac{1}{2}f(x)^2$,
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\right]_{y=f(x)} = [\ln|y|]_{y=f(x)} = \ln|f(x)|$.
- Für Stammfunktionen der Form $\int \frac{c}{(x-b)^a}\,\mathrm{d}x$ gilt:

$$\int \frac{c}{(x-b)^a}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} c\ln|x-b| & \text{falls } a = 1 \\ \frac{c(x-b)^{1-a}}{1-a} & \text{falls } a \neq 1. \end{cases}$$

9. Mehr zu Integralen

Uneigentliche Integrierbarkeit. Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a < b$. Die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heißt **uneigentlich integrierbar**, falls

- $I = [a,b)$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y\uparrow b} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert,
- $I = (a,b]$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y\downarrow a} \int_y^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert oder
- $I = (a,b)$ und ein $c \in (a,b)$ existiert, so dass f in $(a,c]$ und $[c,b)$ uneigentlich integrierbar ist. Dann setzt man: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y\downarrow a} \int_y^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{y\uparrow b} \int_c^y f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert,

Taylorpolynom und -reihe. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $T_n f(x;c) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ das n-te **Taylorpolynom** von f in c und $T_\infty f(x;c)$ entsprechend die **Taylorreihe** von f in c.

Eigenschaften von Taylorpolynomen

- $f(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k z^k \implies T_n f(x;0) = \sum_{k=1}^n c_k z^k$.
- $T_n(f\cdot g) = T_n f \cdot T_n g$.

Satz von Taylor. $f(x) - T_n f(x;c) = R_{n+1}(x)$ mit $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$ für ein $\xi \in [c,x]$. Insbesondere: $R_{n+1}(x) = \mathcal{O}((x-c)^{n+1})$ für $x \to c$.

10. Kurven

Kurven. Für $n \in \mathbb{N}$ und ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist jede stetige Abbildung $\gamma\colon I \to \mathbb{R}$ eine **parametrisierte Kurve**. Das Bild $\{\gamma(t) \mid t \in I\}$ heißt **Spur** von γ. Für $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$ nennt man γ_i die i-te **Komponentenfunktion** von γ.

Man kann $\gamma(t)$ auch als Spaltenvektor darstellen!

differenzierbare Kurven. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurven mit stetig differenzierbaren Komponentenfunktionen $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$.

- $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$ heißt **Tangentialvektor** oder **Geschwindigkeitsvektor**.
- $\|\gamma'(t)\|_2$ ist die **Geschwindigkeit** zur Zeit t.
- γ heißt **regulär** an der Stelle t, falls $\gamma'(t)$ nicht der Nullverktor ist. In diesem Fall nennt man $T_\gamma(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|_2}$ den **Tangentialeinheitsvektor** in t.
- Man nennt γ **regulär**, falls sie in jedem $t \in I$ regulär ist. Sonst ist sie **singulär**.

Es gilt: $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Oft schreibt man einfach $\|\ldots\|$ statt $\|\ldots\|_2$.

Bogenlänge. Die **Bogenlänge** einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_2\,\mathrm{d}t$.

Krümmung. Für eine zweimal stetig differenzierbare Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ist $\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\|\gamma'(t)\|_2^3}$ ihre **Krümmung**.

11. Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Gradient und Hesse-Matrix. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für jede einmal bzw. zweimal stetig differenzierbare Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt $\nabla f(x)$ bzw. $\nabla^2 f(x)$ mit $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$,

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(x) & \cdots & \partial_{1n} f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1} f(x) & \cdots & \partial_{nn} f(x) \end{pmatrix}$$

der **Gradient** bzw. die **Hesse-Matrix** von f in $x \in M$. Für die partiellen Ableitungen gilt: $\partial_{ij} f(x) = \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$.

Mehrdimensionale Extrempunkte. Für $n \in \mathbb{N}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f\colon M \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $c \in M$ gilt:

- f hat ein **lokales Minimum** in $c \implies \nabla^2 f(c)$ positiv semidefinit,
- f hat ein **lokales Maximum** in $c \implies \nabla^2 f(c)$ negativ semidefinit,
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ positiv definit $\implies f$ hat ein **isoliertes lokales Minimum** in c,
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ negativ definit $\implies f$ hat ein **isoliertes lokales Maximum** in c,
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ indefinit $\implies f$ hat einen **Sattelpunkt** in c.

Falls $\nabla f(c) = 0$, dann heißt c **kritischer Punkt**.

Definitheit von Matrizen.

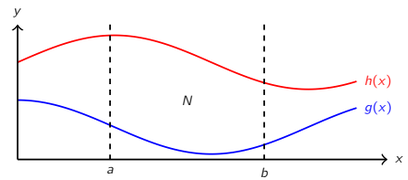
Für eine $(n \times n)$-Matrix A heißt $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ das **charakteristische Polynom** von A. Die Nullstellen von χ_A nennt man **Eigenwerte** von A. Die Matrix $A - \lambda I_n$ ist nichts anderes als A mit „$-\lambda$“ bei jedem Element der Hauptdiagonale. Beispiel: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$.

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

- A **positiv semidefinit** $\iff$ alle Eigenwerte sind ≥ 0,
- A **negativ semidefinit** $\iff$ alle Eigenwerte sind ≤ 0,
- A **positiv definit** $\iff$ alle Eigenwerte sind > 0,
- A **negativ definit** $\iff$ alle Eigenwerte sind < 0,
- A **indefinit** $\iff \exists$ negative und positive Eigenwerte.

12. Integralrechnung in $\mathbb{R}^n$

Zweidimensionale Integrale. Eine Menge der Form $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ heißt **Normalbereich**.



Für N gilt: $\iint_N f(x,y)d(x,y) := \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

Man kann x und y vertauschen, d.h. die Skizze an der Hauptdiagonale spiegeln. Das Ergebnis des Integrals ist das Volumen eines Körpers mit Grundfläche N und Höhe $f(x,y)$.

Satz von Fubini. Für einen rechteckigen Normalbereich $N = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$ gilt: $\iint_N f(x,y)d(x,y) := \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

Die Reihenfolge der Integrale spielt also keine Rolle. Das lässt sich auf $N = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ verallgemeinern.

13. Differentialgleichungen

Die **allgemeine Lösung** (**AL**) hängt von $c \in \mathbb{R}$ (Methoden 1-3) oder $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (Methoden 4-6) ab und ist somit mehrdeutig. Die **spezielle Lösung** (**SL**) ist eindeutig benötigt $y(t_0) = y_0$ (Methoden 1-3) oder $(y(t_0) = y_0$ und $y'(t_1) = y_1$ (Methoden 4-6). Für die **SL** muss man bei Methoden 4-6 t_0 und t_1 in **AL** und Ableitung der **AL** einsetzen und c_1 und c_2 bestimmen.

Methode 1 („Trennung der Variablen“).

$$\boxed{y'(t) = f(t)\cdot g(y(t)).}$$

Jede **AL** erfüllt $G(y(t)) = F(t) + c$ für $c \in \mathbb{R}$, wobei $F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$ und $G(t) = \int \frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t$ beliebige Stammfunktionen von $f(t)$ und $\frac{1}{g(t)}$ sind. Die **SL** erfüllt $\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(u)}\,\mathrm{d}u = \int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s$.

Methode 2. $\boxed{y'(t) + a(t)\cdot y(t) = 0.}$

1. Bestimme eine beliebige Stammfunktion $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$ von $a(t)$.
2. **AL**: $y(t) = ce^{-A(t)}$ für $c \in \mathbb{R}$. **SL**: $y(t) = y_0 e^{A(t_0)-A(t)}$.

Methode 3.

$$\boxed{y'(t) + a(t)\cdot y(t) = f(t).}$$

1. Bestimme eine beliebige Stammfunktion $A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$ von $a(t)$.
2. **AL**: $y(t) = e^{-A(t)}\cdot(c + B(t))$, wobei $B(t) = \int e^{A(t)}\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ eine beliebige Stammfunktion von $e^{A(t)}\cdot f(t)$ ist. **SL**: $y(t) = e^{A(t_0)-A(t)}\cdot(y_0 + \int_{t_0}^t e^{A(s)-A(t_0)}\cdot f(s)\,\mathrm{d}s)$.

Methode 4.

$$\boxed{y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.}$$

Falls $a^2 > 4b$:

1. Bestimme $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$ und $\lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$.
2. **AL**: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Falls $a^2 = 4b$:

1. Bestimme $\lambda_0 = -\frac{a}{2}$.
2. **AL**: $y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_0 t}$.

Falls $a^2 < 4b$:

1. Bestimme $\alpha = -\frac{a}{2}$ und $\beta = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.
2. **AL**: $y(t) = (c_1\cos(\beta t) + c_2\sin(\beta t))e^{\alpha t}$.

Methode 5.

$$\boxed{y''(t) + ay'(t) + by(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0.}$$

1. Bestimme die **AL** $y_h(t)$ von

$$y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0.$$

2. Stelle ein Polynom $y_p(t) = b_n t^n + \ldots + b_1 t + b_0$ mit Parametern $b_0, b_1, \ldots, b_n$ auf.
3. Setze $y_p(t)$, $y_p'(t)$ und $y_p''(t)$ in $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = p(t)$ ein und bestimme $b_0, b_1, \ldots, b_n$.
4. **AL**: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

Methode 6.

$$\boxed{y''(t) + ay'(t) + by(t) = e^{\alpha t}(a_1\cos(\beta t) + a_2\sin(\beta t)).}$$

1. Bestimme die **AL** $y_h(t)$ von $y_h''(t) + ay_h'(t) + by_h(t) = 0$.
2. Stelle $y_p(t) = e^{\alpha t}(b_1\cos(\beta t) + b_2\sin(\beta t))$ in Abhängigkeit von b_1, b_2 auf.
3. Setze $y_p(t)$, $y_p'(t)$ und $y_p''(t)$ in $y_p''(t) + ay_p'(t) + by_p(t) = e^{\alpha t}(a_1\cos(\beta t) + a_2\sin(\beta t))$ ein und bestimme b_1 und b_2.
4. **AL**: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

Lineare Systeme von Differentialgleichungen. $y'(t) = Ay(t)$ für eine Matrix A, d.h.

$$\begin{array}{ccc} y_1'(t) & = & a_{11}y_1(t) + \ldots + a_{1n}y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n'(t) & = & a_{1n}y_1(t) + \ldots + a_{nn}y_n(t) \end{array}$$

1. Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von A.
2. Berechne die zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_k$. Für alle $i = 1, \ldots, k$ soll gelten: $(A - \lambda_i I_n)v_i = 0$.
3. **AL**: $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + \ldots + c_k e^{\lambda_k t}v_k$ für $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$. Für die **SL** Anfangsbedingungen in die **AL** einsetzen.

© 2017 Carlos Camino & Martin Stroschein.

Mitternachtsformel $ax^2+bx+c=0 \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Potenzen & Logarithmus $x^a=b \quad \log_x b=a \quad \sqrt[a]{b}=c$

- $\log_a(n\cdot m)=\log_a n+\log_a m$
- $\log_a n^m=m\cdot\log_a n$
- $\log_a(n/m)=\log_a n-\log_a m$
- $\log_{a^b} n=\frac{1}{b}\cdot\log_a n$
- $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a 1=0$
- $\log_a a=1$
- $\log_a a^n=n$
- $\log_{a^n}\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}$

Dreiecksungleichung $|a+b|\le|a|+|b|$

Schranken $s\in K,\ X\in K$

obere Schranke: $s\ge x$ für alle $x\in X$

untere Schranke: $s\le x$ für alle $x\in X$

Supremum: s ist kleinste obere Schranke $\sup(X)$

nach oben unbeschränkt $\sup(X)=+\infty$

Infimum: s ist größte untere Schranke $\inf(X)$

Maximum: s ist $\sup(X)$ und $s\in X$ $\max(X)$

Minimum: s ist $\inf(X)$ und $s\in X$ $\min(X)$

X ist nach oben beschränkt, wenn X obere Schranke hat

X ist nach unten beschränkt, wenn X untere Schranke hat

beschränkt: nach oben & nach unten beschränkt

- $\sup(X+Y)=\sup(X)+\sup(Y)$
- $\sup(\lambda\cdot X)=\lambda\cdot\sup(X)$ mit $\lambda>0$
- $\sup(X\cdot Y)=\sup(X)\cdot\sup(Y)$ mit $X,Y\subset[0,\infty)$
- wenn $A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}$ und B beschränkt, so ist A beschränkt und $\sup(A)\le\sup(B)$, $\inf(A)\ge\inf(B)$

$[a,b]$ abgeschlossen (a,b) offen

$(a,b]$, $[a,b)$ weder offen noch abgeschlossen

$\mathbb{R}^+$ offen → Komplement $C=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^+$ abgeschlossen

$\mathbb{R}$ und $\emptyset$ → sowohl offen als auch abgeschlossen

Eine Vereinigung offener Mengen ist offen

jede endliche Menge ist abgeschlossen

$\mathbb{Q}$ ist weder offen noch abgeschlossen

A abzählbar unendlich: falls $\exists f: \mathbb{N}\to A$ bijektiv ist $|A|=|\mathbb{N}|$

A höchstens abzählbar: falls $\exists f: \mathbb{N}\to A$ surjektiv ist $|A|\le|\mathbb{N}|$

↳ 是含3 abzählbar unendliche Menge ≠ endliche Menge

A überabzählbar: weder endlich noch abzählbar unendlich

Folgen in $\mathbb{R}$

Grenzwert: (a_n) konvergieren gegen a ($\lim_{n\to\infty} a_n=a$) falls $\forall\varepsilon>0$: $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\ge n_0: |a_n-a|<\varepsilon$. Wenn kein solches a existiert → divergieren

→ eine konvergente Folge ist immer beschränkt und hat genau 1 Grenzwert

Rechenregel für Grenzwerte falls $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n=b$, dann:

- $\lim_{n\to\infty} a_n+b_n=a+b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=a\cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n=a/b$
- $a_n\le b_n$ für alle $n\in\mathbb{N}\Rightarrow a\le b$

Einschließungskriterium: $a=b$ und $a_n\le c_n\le b$ für alle $n\in\mathbb{N}\Rightarrow\lim_{n\to\infty} c_n=a=b$

Uneigentliche Konvergenz: eine divergente Folge (a_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞ (bzw. $-\infty$), falls $\forall K>0: \exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\ge n_0: a_n>K$ (bzw. $a_n<-K$). Notation wie bei Konvergenz

Rechenregel für uneigentliche Grenzwerte: falls $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_n=a$

- $a\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}\Rightarrow\lim_{n\to\infty} a_n+b_n=\infty$
- $a\in\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}\Rightarrow\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=\infty$
- $a\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim_{n\to\infty} a_n/b_n=0$
- $a\in\mathbb{R}^-\cup\{-\infty\}\Rightarrow\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=-\infty$

arithmetische Folge: (a_n), sodass $a_{n+1}-a_n=d$ konstant ist

d.h. $a_1=a$, $a_2=a_1+d$, $a_n=a+(n-1)d$

geometrische Folge: (a_n), sodass $a_{n+1}=q\cdot a_n$ mit q konstant

d.h. $a_1=a$, $a_2=q\cdot a$, $a_n=q^{n-1}\cdot a$

$i^{4k-3}=i^1=i \quad i^{4k-1}=i^3=-i$

$i^{4k-2}=i^2=-1 \quad i^{4k}=i^4=1$

Monotonie: a_n heißt

- monoton wachsend, falls $\forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1}\ge a_n$
- streng monoton wachsend, falls $\forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1}>a_n$
- monoton fallend, falls $\forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1}\le a_n$
- streng monoton fallend, falls $\forall n\in\mathbb{N}: a_{n+1}<a_n$

Monotoniesatz: ist a_n eine monoton wachsende, nach oben beschränkte, reelle Folge, dann konvergiert (a_n): $a:=\lim_{n\to\infty} a_n=\sup a_n:=\sup\{a_n: n\in\mathbb{N}\}$ (analog inf)

Teilfolge und Häufungspunkt HP:

- Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so ist $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gibt es eine gegen $a\in\mathbb{R}$ konvergente Teilfolge von (a_n), ist a der Häufungspunkt.
- Konvergente Folge hat genau 1 HP, nämlich Grenzwert

Satz von Bolzano-Weierstraß: jede beschränkte reelle Folge a_n besitzt eine konvergente Teilfolge, hat also mindestens eine Häufungspunkt

→ (a_n) monoton fallend/wachend ⇒ (a_n) höchstens 1 HP

→ (a_n) konvergent ⇒ (a_n) genau 1 HP (= Grenzwert)

→ (a_n) uneigentlich konvergent gegen ∞ oder $-\infty$ ⇒ (a_n) kein HP

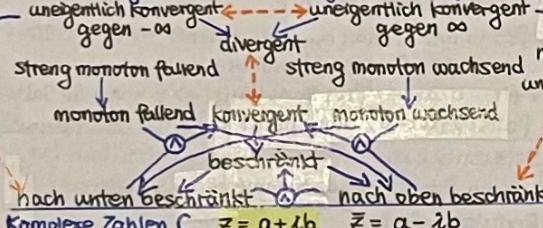
Limes superior $\limsup_{n\to\infty} a_n$ = größte HP von (a_n)

wenn nach oben beschränkt, monoton fallend

Limes inferior $\liminf_{n\to\infty} a_n$ = kleinste HP von (a_n)

wenn nach unten beschränkt, monoton wachsend

Für eine beliebige reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt



Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ $z=a+ib \quad \bar{z}=a-ib$

- Realteil $Re(z)=a\in\mathbb{R}$
- Imaginärteil $Im(z)=b\in\mathbb{R}$
- Betrag $|z|=|\bar{z}|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$
- $\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

Reihen (Folge von Partialsumme einer anderen Folge)

- sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ komplexe Folge, dann heißt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Reihe; $S_n:=\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+\dots+a_n$ (n-te Partialsumme)
- konvergent mit Grenzwert $C\ni s=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_k$ (Folge einer Partialsumme konvergiert); sonst divergent
- absolute Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konvergiert

→ **Konvergente Reihen → als Majorante benutzt**

- geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}$ (für $|z|<1$)
- Teleskopreihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$
- Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e$ (für alle $z\in\mathbb{C}$)
- Logarithmusreihe $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$ (für $x\in(-1,1]$)
- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ (konvergent für $s\in\mathbb{Q}, s\ge 2$)

→ **divergente Reihe → als Minorante benutzt**

- geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ (divergent für $|z|>1$)
- Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$

Konvergenzkriterium: sei (a_n) eine komplexe/reelle Zahlenfolge

→ **Nullfolgenkriterium:** a_n konvergiert nicht gegen 0 ⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

→ **Majoranten- und Minorantenkriterium:** sei (b_n) eine reelle Zahlenfolge mit $|a_n|\le b_n$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$. dann gilt:

- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert ⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert ⇒ $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert

→ **Quotientenkriterium:** falls $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und $a_n\ne 0$ für fast alle $n\in\mathbb{N}$, dann gilt:

- $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut
- $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

→ **Wurzelkriterium:** Es gilt

- $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut
- $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

→ **Leibniz-Kriterium:** falls (a_n) reell und monoton fallend, dann: $\lim_{n\to\infty} a_n=0\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergiert

Potenzreihe $P(z):=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit $c_k\in\mathbb{C}, z\in\mathbb{C}$

für Konvergenzradius $R:=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}}$ gilt:

- $|z|<R\Rightarrow P(z)$ konvergiert
- $|z|>R\Rightarrow P(z)$ divergiert

Cauchy-Produkt

- für absolut konvergente, komplexe Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gilt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
- für Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ mit Konvergenzradien R_a und R_b ist $\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m=\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right)$ mit $c_m=\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradien $\{R_a, R_b\}$

Exponentialfunktion $\exp(x)=e^x \quad \forall z,w\in\mathbb{C}, x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$

- $\exp(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$
- $\exp(z+w)=\exp(z)\cdot\exp(w)$
- $\exp(-z)=\frac{1}{\exp(z)}$
- $\exp(z)\ne 0\ \wedge\ \exp(\bar{z})=\exp(z)$
- $\left|\exp(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right|\le 2\cdot\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\exp(z)$
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1, \lim_{x\to-\infty} x^n e^x=0, \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$
- $e^{i\pi z}=1, e^{i\pi}=-1, e^{z+2\pi i}=e^z$
- Euler-Formel $e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$, $|e^{ix}|=1$

Trigonometrische Funktionen

- $\sin^2(z)+\cos^2(z)=1$
- $\sin(x)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
- $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\cos(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
- $\cos(x)=Re(e^{ix})$
- $\sin(x)=Im(e^{ix})$
- $\sin(z+w)=\sin(z)\cos(w)+\cos(z)\sin(w)$
- $\cos(z+w)=\cos(z)\cos(w)-\sin(z)\sin(w)$
- $\cos(z)=\cos(-z)$
- $\sin(-z)=-\sin(z)$
- $\sin(2z)=2\sin(z)\cos(z)$
- $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
- $\cos(2z)=\cos^2(z)-\sin^2(z)$
- $\sin(\pi-x)=\sin(x)$

α	0	30	45	60	90	120	150	180	270	360
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0

Stetigkeit: $D\subseteq\mathbb{R}$, $f: D\to\mathbb{R}$ Funktion

(i) f heißt stetig in Punkt $c\in D$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n=c$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(c)$

(ii) f heißt stetig auf D, wenn in jedem Punkt stetig

→ jede konstante, Polynom, Id- & Betragsfunktion, Sinus-, Cosinus- und Exponentialfunktion stetig

Rechenregel: $g: D\to\mathbb{R}$

- f und g stetig in $c\in D$, dann $f+g$ und $f-g$ auch stetig
- f und g stetig in $c\in D$, dann $f\cdot g: D\to\mathbb{R}$ auch stetig in c
- f und g stetig in $c\in D$, dann auch f/g stetig in c ($g(c)\ne 0$)

Komposition stetiger Funktion: $A,B\subseteq\mathbb{R}$, $f: A\to\mathbb{R}$, $g: B\to\mathbb{R}$

- f stetig in $c\in A$, $y:=f(c)\in B$ und g stetig in y, dann ist $(g\circ f): A\to\mathbb{R}$ stetig in c
- f und g stetig und $f(A)\subseteq B$, dann $(g\circ f)$ stetig

ε-δ-Charakterisierung: $D\subseteq\mathbb{R}$, $f: D\to\mathbb{R}$, $c\in D$

⇒ f stetig in c ⇔ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: \forall x\in D: |x-c|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(c)|<\varepsilon$

Zwischenwertsatz: sei $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und entweder $f(a)<y<f(b)$ oder $f(b)<y<f(a)$, dann gibt es $x\in(a,b)$ mit $f(x)=y$

→ sei $a<b$, $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $f(a)<0$ und $f(b)>0$, so gilt $\exists x\in[a,b]: f(x)=0$

Fixpunkt: Funktion $f(x)$ hat einen Schnittpunkt mit der Gerade $y=x$ d.h $f(x)=x$

Stetigkeit durch links- und rechtsseitig Grenzwert prüfen

- linksseitiger Grenzwert $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ $x\searrow a$
- rechtsseitiger Grenzwert $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ $x\nearrow a$

→ falls links und rechts gleich, dann stetig, sonst unstetig

Differentiallion (Ableitung): $I\subseteq\mathbb{R}$ Intervall & $f: I\to\mathbb{R}$ Funkt.

f diff'bar in Punkt $c\in I$, wenn Grenzwert $f(c)'=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ existiert

→ f diff'bar ⇒ f stetig

Ableitungsregel

- Summenregel $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
- Faktorregel $(c\cdot f(x))'=c\cdot f'(x)$
- Produktregel $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
- Kettenregel $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$
- Quotientenregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Konvergenz von Funktionenfolge

punktweise: $\forall x\in D: \lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|=0$

gleichmäßig: $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$

$f_n\to f$ gleichmäßig & f_n alle stetig ⇒ f stetig

Konvergenz von Funktionenreihen

punktweise: falls $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ $\forall x\in D$ als Reihen konvergiert

gleichmäßig: falls $\sup_{x\in D}|f_n(x)|\le a_n$ $\forall n$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n<\infty$

$f=\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergent gleichmäßig & f_n alle stetig ⇒ f stetig

gleichmäßige Konvergenz ⇒ punktweise Konvergenz

Folgen $(f_n)_n$ alle diff'bar

$f_n\to f$ punktweise, $f_n'\to g$ gleichmäßig ⇒ f diff'bar mit $f'=g$

Reihen (gliedweise diff')

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ punktweise gegen f, $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ gleichmäßig gegen g ⇐

Satz von Rolle: f stetig auf $[a,b]$, diff'bar auf (a,b) falls $f(a)=f(b)\Rightarrow\exists z\in(a,b)$ mit $f'(z)=0$

Mittelwertsatz: f stetig auf $[a,b]$, diff'bar auf (a,b) $\Rightarrow\exists z\in(a,b)$ mit $f'(z)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = Steigungsdreieck $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Injektivität, Surjektivität, Bijektivität. sei $f: A \to B$ eine beliebige Funktion. dann gilt:
- f injektiv $\Leftrightarrow$ für jedes $y \in B$ gibt es höchstens ein $x \in A$ mit $f(x)=y$
- f surjektiv $\Leftrightarrow$ für jedes $y \in B$ gibt mindestens ein $x \in A$ mit $f(x)=y$
- f bijektiv $\Leftrightarrow$ f injektiv und surjektiv $\Leftrightarrow$ für jedes $y \in B$ gibt genau ein $x \in A$ mit $f(x)=y$ $\Leftrightarrow$ Es existiert ein Umkehrfunktion f^{-1} von f

für A intervall und f stetig gilt:
- f injektiv $\Leftrightarrow$ f streng monoton wachsend / fallend
- f bijektiv $\Leftrightarrow$ f^{-1} auch stetig

für f differenzierbar und A offenes Intervall gilt
- $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in A$ $\Leftrightarrow$ f monoton wachsend
- $f'(x) > 0$ für alle $x \in A$ $\Leftrightarrow$ f streng monoton wachsend
- $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in A$ $\Leftrightarrow$ f monoton fallend
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in A$ $\Leftrightarrow$ f streng monoton fallend

Extrempunkte für $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $x \in (a,b)$ gilt:
- $f'(x)=0$ und $f''(x)>0$ $\Rightarrow$ x ist lokales Minimum
- $f'(x)=0$ und $f''(x)<0$ $\Rightarrow$ x ist lokales Maximum
- x ist lokales Minimum $\Rightarrow$ $f'(x)=0$ und $f''(x) \geq 0$
- x ist lokales Maximum $\Rightarrow$ $f'(x)=0$ und $f''(x) \leq 0$

Unterscheidung Min/Max: sei $f'(x_0)=0$

$f' \geq 0$ in (a, x_0) & $f' \leq 0$ in (x_0, b) $\Rightarrow$ Max

$f' \leq 0$ in (a, x_0) & $f' \geq 0$ in (x_0, b) $\Rightarrow$ Min

(links von x_0 / rechts von x_0)

globales Minimum: x_0 ist globale Min Stelle falls $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in I$

lokales Minimum: x_0 ist lokale Min Stelle falls $\exists U(x_0) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ mit $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U(x_0) \cap I$

Landau-Symbole. für $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ gilt
- $f(x) = o(g(x))$ für $x \to c$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- $f(x) = O(g(x))$ für $x \to c$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to c} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$

Satz von l'Hospital. Seien $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $(\forall x \in (a,b))$ und entweder $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$

falls $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(wichtige Grenzwert-Regel (wegen Stetigkeit von Exponentialfunktion und Def der allgemein Potenz $a^b = \exp(b \cdot \ln a) = e^{b \cdot \ln a}$

$\lim f(x)^{g(x)} = \exp(\lim(g(x) \cdot \ln(f(x))))$

z.B. $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \exp(\frac{\ln x}{x}) = \exp(\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x}) = e^0 = 1$

Integration bestimmter Funktionen (Approximation durch Treppenfkt)

Untersumme $U_z(f) = \int_a^b g(x)\,dx$, $g(x) = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $\forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

Obersumme $O_z(f) = \int_a^b \Psi(x)\,dx$, $\Psi(x) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ $\forall x \in (x_{i-1}, x_i)$

Unterintegral $U(f) = \sup_{\text{Zerlegung } z} U_z(f)$

Oberintegral $O(f) = \inf_{\text{Zerlegung } z} O_z(f)$

f heißt integrierbar, wenn $U(f) = O(f)$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = U(f) = O(f)$

gerade Funktion f wenn $f(-x) = f(x)$ **ungerade Funktion** f wenn $f(-x) = -f(x)$

Integration: f und g müssen stetig diff'bar sein

(wichtige Beziehungen für $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ gilt

f diff'bar $\Rightarrow$ f stetig $\Rightarrow$ f beschränkt $\Rightarrow$ f integrierbar

Eigenschaften integrierbarer Funktionen

für $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in \mathbb{R}$ gilt
- **Linearität:** $\alpha f + \beta g$ integrierbar mit $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$
- **Monotonie:** gilt $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- **Zerlegbarkeit:** sei $c \in (a,b)$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
- **Faktorregel:** $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
- **Integration in "falsche Richtung":** $a<b$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Hauptsatz Differential- und Integralrechnung (HDI)

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

→ **partielle Integration** (eine ableiten, Stafu zu anderen)

$\int_a^b f(x) g'(x)\,dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\,dx$

→ **Substitution** (Stafu einer Funktion kommt in anderer vor)

$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$

Uneigentliche Integrierbarkeit: seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $a<b$. Die Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt uneigentlich integrierbar, falls
- $I = [a,b)$ und $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \uparrow b} \int_a^y f(x)\,dx$ existiert
- $I = (a,b]$ und $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \downarrow a} \int_y^b f(x)\,dx$ existiert
- $I = (a,b)$ und ein $c \in (a,b)$ existiert, sodass f in $(a,c]$ und $[c,b)$ uneigentlich integrierbar ist. dann: $\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{y \downarrow a} \int_y^c f(x)\,dx + \lim_{z \uparrow b} \int_c^z f(x)\,dx$ existiert

f konvex $f'' \geq 0$ / f konkav $f'' \leq 0$ — f konkav wenn $-f$ konvex

Jensen Ungleichung: f konvex auf (a,b), $x_1, \dots, x_n \in (a,b)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$

Taylor-Entwicklung

Satz von Taylor (Approximation einer komplexen Fkt) sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a,b[$ $(n+1)$-mal differenzierbar. für jedes $a \leq x \leq b$ gibt es $\xi \in]a,x[$ mit

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ → $R_{n+1}(a,x) = O((x-a)^{n+1})$ für $x \to a$

Fehlerabschätzung

↳ n-te Taylorpolynom $T_n f(x;a)$ von f in a

Taylorreihe: $(n=\infty)$-te Taylorpolynom

$f^{(k)}$ = k-te Ableitung von f

$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$

partielle Ableitung (immer nur nach eine Komponente ableiten)

kritischer Punkt

Gradient $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$ → $\partial_1 f(x) = 0$ → $\partial_n f(x) = 0$

Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n \partial_n f(x) \end{pmatrix}$

charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = (x-\lambda_1) \cdot \dots \cdot (x-\lambda_n)$

Eigenwert von A = Nullstelle von $\chi_A(\lambda)$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb$

für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:
- A positiv semi definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte ≥ 0
- A negativ semi definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte ≤ 0
- A posttiv definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte > 0
- A negativ definit $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte < 0
- A indefinit $\Leftrightarrow$ $\exists$ negative u. positive Eigenwerte

Mehrdimensionale Extrempunkte. für $n \in \mathbb{N}, M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: M \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'' und $c \in M$ gilt:
- f hat ein lokales Minimum in c $\Rightarrow$ $\nabla^2 f(c)$ positiv semidefinit
- f hat ein lokales Maximum in c $\Rightarrow$ $\nabla^2 f(c)$ negativ semidefinit
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ positiv definit $\Rightarrow$ f hat ein isoliertes lokales Minimum in c
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ negativ definit $\Rightarrow$ f hat ein isoliertes lokales Maximum in c
- $\nabla f(c) = 0$ und $\nabla^2 f(c)$ indefinit $\Rightarrow$ f hat ein Sattelpunkt in c
- falls $\nabla f(c) = 0$, dann heißt c kritischer Punkt

Satz von Schwarz: falls f zweimal diff''bar ist, dann ist $\nabla^2 f$ eine symmetrischer Matrix

Reduktionsformel

$\int \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int \sin^{n-2}(x)\,dx - \frac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n}$

$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n} \cdot \int \cos^{n-2}(x)\,dx + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$

$\lim x \to \infty$ • $e^x = \infty$ • $e^{-x} = 0$ • $x^a q^x = 0$ $(\forall a \leq q < 1)$

• $\frac{1}{x} = 0$ • $1 + \frac{1}{x} = 1$ • $e^x / x^m = 0$ • $\ln(x) = \infty$ • $n^{\frac{1}{n}} = 1$

• $(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$ • $(1+\frac{1}{x})^b = 1$ • $(1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$ • $\frac{2x}{2^x} = 0$

• $(\frac{x}{x+k})^x = e^{-k}$ • $\ln(x)/x = 0$ • $\log(x)/x^a = 0$

• $\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ • $\sqrt{x} = \infty$ • $\sqrt[x]{x} = 1$ • $\frac{\sin(x)}{x} = 0$

$\lim x \to 0$ • $\ln(x) = -\infty$

• $\exp(x) = 1$ • $\sqrt{x} = 0$ • $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ • $\frac{\sin(x)}{x} = 1$

• $\frac{1}{\cos(x)} = 1$ • $\frac{\log(1)-x}{x} = -1$ • $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

• $\frac{x}{\arctan(x)} = 1$ • $\frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$ $(\forall a > 0)$ • $\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

• $x \cdot \log(x) = 0$ • $\frac{\cos(x)-1}{x} = 0$ • $\frac{e^x - 1}{x} = 1$ • $\frac{e^{ax}-1}{x} = a$

$\lim x \to -\infty$ • $e^x = 0$ • $e^{-x} = \infty$ • $xe^x = 0$

• $\lim_{x \to \pm\infty} (1+x)^x = e$ • $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$

• $\lim_{x \to \pm\infty} (1+\frac{k}{x})^{mx} = e^{km}$ • $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$

• $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ • $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$

Nützliche Substitutionen (1) e^x subst $t = e^{ax}$ $dx = \frac{dt}{at}$ $\sinh = \cosh = \frac{t^2-1}{2t}$

(2) $\log(x)$ subst $t = \log(x)$ $x = e^t$ $dx = e^t dt$

(3) für gerade n: $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$, $\tan(x)$ subst $t = \tan(\frac{x}{2})$, $dy = \frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$

(5) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ subst $x = \sin(x)$ oder $\cos(x)$

(6) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ sub: $x = \sinh(x)$

(4) für ungerade n: $\cos^n(x)$, $\sin^n(x)$, subst $t = \tan(\frac{x}{2})$, $dy = \frac{2}{1+t^2}dt$ $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

für $a>0$ und $a \neq 1$ gilt: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$n \cdot x^{n-1}$	$x^n = e^{n \cdot \ln x}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ $(n \neq -1)$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{n}{n+1}(\sqrt[n]{x})^{n+1}$ $(n \neq -1)$
$-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	$2\sqrt{x}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$
/	$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln\lvert g(x)\rvert$
/	$g'(x) \cdot g(x)^n$	$\frac{1}{n+1} \cdot g(x)^{n+1}$
$k \cdot e^{kx+b}$	e^{kx+b}	$\frac{1}{k} \cdot e^{kx+b}$
$a^x \cdot \ln(a)$ $(a>0)$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$x^x \cdot (1+\ln(x))$	x^x $(x>0)$	/
/	$g'(x) \cdot \ln(g(x))$	$g(x)\ln(g(x)) - g(x)$
$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$\log_a x$	$\frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$
$2\sin(x) \cdot \sin'(x)$	$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2} \cdot (x - \sin(x) \cdot \cos(x))$
$2\cos(x) \cdot \cos'(x)$	$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2} \cdot (x + \sin(x) \cdot \cos(x))$
$2\tan(x) \cdot \tan'(x)$	$\tan^2(x)$	$\tan(x) - x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}$	$\cosh(x) = \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}$

- $(u(x)^n)' = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot u'(x)$ • $(a^{f(x)})' = \ln(a) \cdot a^{f(x)} \cdot f'(x)$
- $(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \cdot (\ln(f(x)) \cdot g(x))'$ • $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$
- **Integralkriterium:** sei $f(x)$ eine stetige positive monoton fallende Funktion auf $[k, \infty[$ und $f(n) = a_n$

$\int_k^\infty f(x)\,dx$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ konvergiert

$\int_k^\infty f(x)\,dx$ divergiert $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ divergiert

- **Jensen Ungleichung:** f konvex auf (a,b), $x_1, \dots x_n \in (a,b)$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ $\Rightarrow$ $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$
- falls $\limsup_{n \to \infty} x_n = \liminf_{n \to \infty} x_n$ $\Rightarrow$ konvergiert, sonst divergiert

Körper $(K, +, *)$ ist Menge mit zwei Abb.. Körperaxiome:

1. $(K, +)$ ist abelsche Grp. mit neutr. Elem. 0.
2. $(K\backslash\{0\},\ *)$ ist abelsche Grp. mit neutr. Elem. 1.
3. $\forall x, y, z \in K: (x + y) * z = x * y + y * z$ (distrib.)

Abelsche Gruppe: $\forall a, b \in K: a \circ b = b \circ a$ (kommutativ)
(i) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (assoziativ)
(ii) Existenz eines neutralen Elements
(iii) Existenz von inversen Element ($-a$ bzw. $1/a$)

Angeordneter Körper:

1. für jedes $x \in K$ gilt genau eines von: $x \in K_+,\ x = 0$ oder $(-x) \in K_+$.
2. für alle $x, y \in K_+$: $x + y \in K_+$ und $x * y \in K_+$.

Rechnen mit Ungleichungen:

(i) Antisymm.: $x \geq y$ und $x \leq y$ dann $x = y$
(ii) Transitiv.: $x > y$ und $y > z$ dann $x > z$ (ebenso $\geq$)
(iii) Addition: $x > y$ und $z > w$ dann $x + z > y + w$
(iv) Mult. mit Neg.: $x > y$ und $z < 0$ dann $xz < yz$
(v) Positiv. d. Quadrate: für jed. $x \in K\backslash\{0\}$ gilt $x^2 > 0$
(vi) Inversion: $x > y > 0$ dann $y^{-1} > x^{-1} > 0$

Schranken: $s \in K,\ X \subset K$

(i) obere Schranke: $s \geq x$ für alle $x \in X$
(ii) untere Schranke: $s \leq x$ für alle $x \in X$
(iii) Supremum: s ist kleinste obere Schranke ($sup(X)$); nach oben unbeschränkt: $sup(X) = +\infty$
(iv) Infimum: s ist größte untere Schranke ($inf(X)$)
(v) Maximum: s ist $sup(X)$ und $s \in X$ ($max(X)$)
(vi) Minimum: s ist $inf(X)$ und $s \in X$ ($min(X)$)
(vii) X ist nach oben/unten beschränkt, wenn X obere/untere Schranke hat (beschränkt = beides)

Rechenregeln für Suprema:

(i) $sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
(ii) Wenn $\lambda > 0$, dann $sup(\lambda * X) = \lambda * \sup(X)$
(iii) $X, Y \subset [0, \infty)$, dann $sup(X * Y) = \sup(X) * \sup(Y)$
(iv) Wenn $X \subset Y$, dann $sup(X) \leq \sup(Y)$

Vollständigkeit (Supremumseigenschaft):
Körper ist vollständig, wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge $X \subset K$ (außer $\emptyset$) ein Supremum $\in K$ besitzt.

Archimedische Anordnung (z. B.: $\mathbb{R}$)

(i) zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n > x$
(ii) zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R} > 0$ gibt's ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} < \epsilon$
(iii) zu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ gibt es $q \in \mathbb{Q}$ mit $a < q < b$

Dreiecksungleichung:
$|a + b| \leq |a| + |b|$ bzw. neg. ($\in \mathbb{C}$): $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$

Geometrische Summenformel:
$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q \in \mathbb{R}$ bzw. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$

Zwischenwertsatz: Zeige, dass Gleichung Lösung besitzt:

1. Umschreiben zu Gleichung der Form „= 0"
2. Prüfe Definitionsbereich; muss stetig sein
3. Finde zwei x sodass $f(x_1) > 0$ und eines mit $f(x_2) < 0$
4. Da stetig gibt es Nullstelle dazwischen

Zahlenfolgen (insb. reelle Folgen):
(a_n) bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a: \mathbb{N} \to M, n \mapsto a_n$,
bspw. alternierende Folge $a_n := (-1)^n$ oder Nullfolge $\left(\frac{1}{n}\right)$

Grenzwert reeller Folgen (analog für komplexe Folgen):
$a \in \mathbb{R}$ ist GW $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0: |a_n - a| < \epsilon$
d. h. (a_n) konvergiert gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$; sonst divergent
Konverg. re. Folge hat nach 2.4 (ii) genau einen Grenzwert.

Konvergenz zeigen: $\epsilon > 0$ beliebig; wähle n_0 so groß, dass $\forall n \geq n_0: |a_n - a| < \epsilon$

Komplexe Folge $(a_n + ib_n)$ konv. wenn (a_n) und (b_n) konv.

Komplexe Zahlen: $z = a + ib,\ \ a, b \in \mathbb{R},\ \ i^2 = -1$
Konjugation: $\bar{z} = a - ib$ $\left(\boldsymbol{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2},\ \boldsymbol{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ und $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

Rechenregeln für Grenzwerte: Sei $a = \lim_{n\to\infty}(a_n)$, b analog

(i) $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gg. $a + b$
(ii) $(a_n * b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gg. $a * b$
(iii) Falls $b \neq 0$, konvergiert $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gg. $\frac{a}{b}$
(iv) Falls $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a \leq b$
(v) Einschließungskriterium: Sei zusätzlich (c_n) geg. und es gelte $a = b$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert c_n ebenfalls geg. a bzw. b.

Uneigentliche Konvergenz:
gg. $+\infty$, falls $\forall\, K > 0: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0\ :\ \ a_n > K$
gg. $-\infty$, falls $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uneig. gg. $+\infty$ konv.

Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte: $b_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

(i) Wenn $a \neq \infty$, dann konv. $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uneg. gg. ∞
(ii) Wenn $a \neq 0$, dann konv. $(a_n * b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une. gg. $\pm\infty$
(iii) Falls $a \in \mathbb{R}$, konvergiert $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gg. 0.

Monotonie: a_n heißt...

(i) monoton wachsend, falls $\forall\, n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \geq a_n$
(ii) streng monoton wachsend, falls $\forall\, n \in \mathbb{N}: a_{n+1} > a_n$
(iii) monoton fallend, falls $\forall\, n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \leq a_n$
(iv) streng monoton fallend, falls $\forall\, n \in \mathbb{N}: a_{n+1} < a_n$

Monotoniesatz: Ist a_n eine monoton wachsende, nach oben beschränkte, reelle Folge, dann konvergiert (a_n) gg.
$a := \lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (analog Inf.)

Teilfolge und Häufungspunkt:
Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so ist $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Gibt es eine gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergente Teilfolge von (a_n), ist a ein HP.
Konvergente Folge hat genau einen HP, nämlich ihren GW.

Satz v. Bolzano-Weierstraß:
Jede beschränkte reelle Folge a_n besitzt eine konvergente Teilfolge, hat also mind. einen HP.

Limes superior/inferior:
$\limsup_{n\to\infty} a_n$ = größter HP von (a_n), wenn nach oben besch.
$\liminf_{n\to\infty} a_n$ = kleinster HP von (a_n), wenn nach unten besc.

Konvergenz mehrdimensionaler Folgen: Sei v_n Folge im $\mathbb{R}^d$
$v \in \mathbb{R}^d$ heißt GW von (v_n), wenn jede Folge gleicher Komponenten der Vektoren ($v_n = (v_{n,1}, \dots, v_{n,d})$) konv..
$v = \lim_{n\to\infty} v_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_\infty = 0$
wobei $\|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{d}(x_j - y_j)^2}$ (eukl. Länge/Abstand)
und $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_d|\}$ (Maximumsnorm).

Heruntergeladen von Studydrive

Reihen (Folge von Partialsummen einer anderen Folge):
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ komplexe Folge, dann heißt $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Reihe;
$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n$ (n-te Partialsumme).
Konvergent mit GW $\mathbb{C} \ni s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$ (Folge ihrer Partialsummen konvergiert); sonst divergent.

Absolute Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert ($\frac{1}{k^a}$ konv. wenn $a>1$).

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konv. falls $|q| < 1$ gegen

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, sonst div.

Logarithmusreihe: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, $x\in(-1,1)$

Konvergenzkriterien für Reihen:

1. Wenn $A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $B := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen sind, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle Folge ist und $|a_k| \le b_k$ für *fast alle* k (d. h. endlich viele Ausnahmen) gilt, dann:
   Majorantenkriterium: B konv. $\Rightarrow A$ konv. absolut
   Minorantenkriterium: A div. $\Rightarrow B$ div.
   Z. B.: Folge $\frac{k!}{k^k} \le \frac{2}{k^2}$ mit $2*\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ als Majorante konv.
   $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3k}{k^3-3k}$ mit harmon. Reihe als Minorante div.
2. **Quotientenkriterium**: $A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Wenn $q := \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ existiert und ...
   (i) $q < 1 \Longrightarrow A$ konv. absolut
   (ii) $q > 1 \Longrightarrow A$ div.
   (iii) $q = 1 \Longrightarrow$ keine Aussage mit dem QK möglich
3. **Wurzelkriterium**: Reihe $A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$
   Sei $q := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.
   (i) $q < 1 \Longrightarrow A$ konv. absolut
   (ii) $q > 1 \Longrightarrow A$ div.
   (iii) $q = 1 \Longrightarrow$ keine Aussage mit dem QK möglich
4. **Leibniz-Kriterium**:
   Wenn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reelle, monoton fallende Nullfolge ist (d. h. konv. gg. 0), dann konv. d. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$
5. ***Nullfolgenkriterium***: Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$
   $\lim_{i\to\infty} a_i \neq 0$ (oder nicht existent) $\Longrightarrow$ Reihe divergiert

Potenzreihe: Reihe der Form $P(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ mit Koeffizient $c_k \in \mathbb{C}$ und Variable $z \in \mathbb{C}$.

Konvergenzradius $R := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ (hier: $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$)

($\rightarrow$ Wenn Reihe div. (abgesehen von $z = 0$), dann $R = 0$)

Konvergenz (Satz von Cauchy-Hadamard):
(i) $P(z)$ konv. abs. für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$
(ii) $P(z)$ div. für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$

Cauchy-Produkt:
(i) **Produkt zweier** abs. konv. **Reihen** $A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $B := \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{C}$:
$A * B = \sum_{m=0}^{\infty} c_m$ mit $c_m := \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$
(ii) **Produkt zweier Potenzreihen** $A := \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $B := \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ mit KVR R_a und R_b:
$A * B = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ mit $c_m := \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}$
und KVR ist $\min\{R_a, R_b\}$

Exponentialreihe $e^z := \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (QK)

(i) $\forall\, z,w \in \mathbb{C} :\ e^{z+w} = e^z + e^w$

(ii) $\forall\, z \in \mathbb{C} :\ e^{-z} = \frac{1}{e^z},\ e^z \neq 0\ und\ e^{\bar{z}} = e^z$

(iii) $\forall\, x \in \mathbb{R} :\ |e^{ix}| = 1\ (= \left|Re\left(e^{ix}\right)^2 + Im\left(e^{ix}\right)^2\right|)$

(iv) $\forall\, z \in \mathbb{C} :\ \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$

(v) $\forall\, z \in \mathbb{C} :\ |e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}| \le 2 * \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$

Weitere: $\frac{1}{2}\left(e^a + e^b\right) \ge e^{\frac{a+b}{2}}$

für alle $x > 0, n \in \mathbb{N}$ gilt $e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\lim_{x\to\infty} x^n e^x = 0$, $\lim_{x\to\infty} x^{-n} e^x = \infty$

Wichtig: $a^b = e^{b * \ln a}$ ($\exp(x)$ ist stetig)

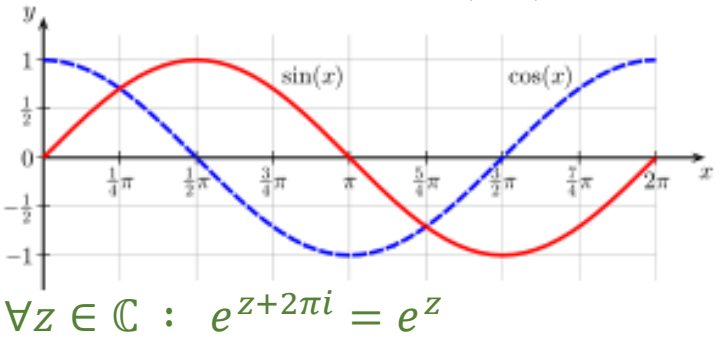
Trigonometrische Funktionen (**Sinus**, **Cosinus**):

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Eigenschaften:
(i) $\forall z \in \mathbb{C} :\ e^{iz} = \cos(z) + i * \sin(z)$ (Euler-Formel)
und $\left(\sin(z)\right)^2 + (\cos(z))^2 = 1$
(ii) Additionstheoreme (für alle $z, w \in \mathbb{C}$):
- $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
  Doppelwinkelformeln (setze $z = w$):
  - $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
  - $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R} :\ \cos(x) = Re\left(e^{ix}\right)$ u. $\sin(x) = Im\left(e^{ix}\right)$
(iv)
(v)



(vi) $\forall z \in \mathbb{C} :\ e^{z+2\pi i} = e^z$

Stetigkeit: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion
(i) f heißt stetig im Punkt $c \in D$, wenn für jede Folge (x_n) in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$
(ii) f heißt stetig (auf D), wenn in jedem Punkt stetig
$\rightarrow$ Jede konstante, Polynom-, Id- & Betragsfunktion stetig

Rechenregeln: $g: D \to \mathbb{R}$
(i) f und g stetig in einem $c \in D$, dann $f + g$ auch st.
(ii) – " –, dann auch $f * g: D \to \mathbb{R}$ stetig in c
(iii) – " – und $g(c) \neq 0$, dann auch $\frac{f}{g}$ stetig in c

Komposition stg. Fkt.: $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}, g: B \to \mathbb{R}$
(i) f stg. in $c \in A$, $y := f(c) \in B$ und g stg. in y, dann ist $(g \circ f): A \to \mathbb{R}$ stetig in c.
(ii) f und g stg. und $f(A) \subseteq B$, dann $(g \circ f)$ stetig.

ϵ- δ-Charakterisierung: $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion, $c \in D$
f ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ zu jedem $\epsilon > 0$ (y) gibt es ein $\delta > 0$ (x) mit $\forall\, x \in D, |x - x_0| < \delta :\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
geg. $\epsilon \rightarrow$ finde ein δ, sodass obiges gilt

Heruntergeladen von Studydrive

Differentiation / Ableitung: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall & $f: I \to \mathbb{R}$ Fkt.

f diff'bar in Pkt. $c \in I$, wenn GW $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} =: f'(c)$ exi.

→ GW an der Stelle 0: $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

f diff'bar auf I, wenn f in jedem Pkt. $c \in I$ diff'bar

f stetig diff'bar, wenn Ableitung $f': I \to \mathbb{R}$ stetig

f diff'bar $\Longrightarrow f$ stetig

Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
$n * x^{n-1}$	$x^n = e^{n*\ln x}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$ $(n \neq -1)$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (x')	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$
$\frac{1}{n * \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{n}{n+1} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n+1}$ (wenn $n \neq -1$)
$-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x * x'} = x^{-1}$	$\ln \lvert x \rvert$ | $\ln x$	$x \ln x - x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} - x$
$\sim$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln \lvert g(x) \rvert$
$\sim$	$g'(x) * g(x)^n$	$\frac{1}{n+1} * g(x)^{n+1}$
$k * e^{kx}$	e^{kx}	$\frac{1}{k} e^{kx}$
$a^x \ln a$ $(a > 0)$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$x^x * (1 + \ln x)$	x^x $(x > 0)$	$\sim$
$\sim$	$g'(x) * \ln g(x)$	$g(x) \ln g(x) - g(x)$
$\frac{1}{x * \ln a}$	$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a} * (x \ln x - x)$
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$
$2 \sin x * \sin' x$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2} * (x - \sin x * \cos x)$
$2 \cos x * \cos' x$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2} * (x + \sin x * \cos x)$
$2 \tan x * \tan' x$	$\tan^2 x$	$\tan(x) - x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\cos \arcsin x}$	$\arcsin x = \sin^{-1} x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{-\sin \arccos x}$	$\arccos x = \cos^{-1} x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x = \tan^{-1} x$	$x \arctan x - \frac{\ln(1+x^2)}{2}$
$\cosh x$	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh -x$	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh -x$
$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	$\ln \cosh x$

Rechenregeln für Ableitungen:

1. **Kettenregel**: $(g \circ f)'(c) = g'\big(f(c)\big) * f'(c)$
   g nach f (d. h. f als Parameter von g)
2. Addition: $(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$
3. Faktorisierung: $(\lambda * f)'(c) = \lambda * f'(c)$
4. **Produktregel**: $(f * g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$
5. **Quotientenr**: $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = {f'(c)g(c) - f(c)g'(c)} \big/ {g(c)^2}$
6. **Umkehrfunktion**: $(f^{-1})'(z) = {1} \big/ {f'(c)}$ mit $z := f(c)$
7. ***Regel von de l'Hospital***: Wenn f, g stetig und $g'(x) \neq 0$

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

Wichtige Grenzwert-Regel (wegen Stetigkeit von Exp. und wegen Def. der allg. Potenz $a^b := \exp(b * ln\, a)$):

$$\lim f(x)^{g(x)} = \exp\big(lim(g(x) * ln\big(f(x)\big)\big)$$

z. B. $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \exp\left(\frac{ln\, x}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x \to \infty} \frac{ln\, x}{x}\right) = e^0 = 1$

und $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$

Kurvendiskussion / **Extremum:**

f hat lokales Maximum in c, wenn

$$\exists\, \epsilon > 0 \;:\; \forall\, x \in (c-\epsilon, c+\epsilon) \cap I \;:\; f(c) \geq f(x)$$

... lokales Minimum, wenn $f(c) \leq f(x)$ für den Bereich gilt

... isoliertes Min./Max., wenn $<$ bzw. $>$ gilt

... globales Min./Max., wenn $\leq$ bzw. $\geq$ für *alle* $x \in I$ gilt

$f(c)$ heißt lokales bzw. globales Extremum, wenn $f(c)$ lokales bzw. globales Minimum bzw. Maximum ist.

→ f streng mono. wachsend ⇒ kein Minimum (analog. fall.)

Integration: f und g müssen stetig diff'bar sein.

- Hauptsatz Differential- u. Integralrechnung (HDI):

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$$

- **Partielle Integration** *(eine ableiten, Stafu zur anderen)*:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\, dx$$

z. B. Stammfunktion herleiten zu $f(x) = \ln x$:
Wähle $g(x) = 1$, sodass: $\int \ln(x) * 1\, dx =$
$\ln(x) * x - \int \frac{1}{x} * x\, dx = x * \ln(x) + x$

- **Substitution** *(Stafu der einen Fkt. kommt in andrer vor)*:

$$\int_a^b f\big(g(x)\big) * g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

z. B.: Substituiere $u = x^2$ bei „$\triangleq$" mit $dx = \frac{1}{u'} du$:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x \cos(x^2)\, dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \cos(x^2) * 2x\, dx \triangleq$$
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cos(u) * \frac{2x}{2x} du = \frac{1}{2} [\sin(u)]_0^{\pi} = 0$$

Rechenregeln:

- $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
- $\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$
- $\int \lambda * f(x)\, dx = \lambda * \int f(x)\, dx$
- $\int f(x) \pm g(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Heruntergeladen von Studydrive

Uneigentliche Integration: $a < y < b$, bei offenem Intervall ist $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; falls GW über jedem Intervall (d. h. beliebigem y) existiert:

- $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{y \uparrow b} \int_a^y f(x)\,dx$
- $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$: $\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{y \downarrow a} \int_y^b f(x)\,dx$

→ Inneres (im Limes) Integral in Abhängigkeit von y berechnen und dann Limes davon berechnen.

- Im Fall $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ist die Fkt. uneig. integrierbar (über (a,b)), wenn es ein $c \in (a,b)$ mit der Eigenschaft gibt, dass f sowohl über $(a,c]$ als auch über $[c,b)$ uneig. integrierbar ist; dann:

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{y \downarrow a} \int_y^c f(x)\,dx + \lim_{y \uparrow b} \int_c^y f(x)\,dx$$

Satz von **Taylor**: Approximation einer komplexen Fkt. f

- n-tes **Taylorpolynom** von f in c:

$$T_n f(x;c) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} * (x-c)^k$$

wobei $f^{(k)}$ = k-te Ableitung von f.

Bsp.: $T_0 \cos(x,\pi) = \frac{\cos(\pi)}{1} * 1 = -1$

$$T_1 \cos(x,\pi) = -1 + \frac{-\sin(\pi)}{1} * (x-\pi)^1 = -1$$

$$T_2 \cos(x,\pi) = -1 + \frac{-\cos(\pi)}{2} * (x-\pi)^2 = \cdots$$

- **Taylorreihe**: $(n = \infty)$-tes Taylorpolynom

Kurven: $\Upsilon\colon I \to \mathbb{R}$, $\Upsilon(t) = \begin{pmatrix} \Upsilon_1(t) \\ \vdots \\ \Upsilon_n(t) \end{pmatrix}$, Bild $\Upsilon(I)$ heißt *Spur*

- reguläre Stellen $t \in I$: $\Upsilon'(t) \neq 0$
  singuläre Stellen: $\Upsilon'(\mathrm{t}) = 0$ (alle $\Upsilon_\mathrm{k} = 0$)
  → Υ ist **regulär** auf jedem Intervall ohne singuläre Pkt.
- **Länge** von $\Upsilon|_{[a,b]}$:
  - falls $\sup\{\sum_{k=1}^{n} \|\Upsilon(t_k) - \Upsilon(t_{k-1})\|_2 : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\} < \infty$, dann ist $L(\Upsilon)$ die Länge von $\Upsilon\colon [\mathrm{a},\mathrm{b}] \to \mathbb{R}$
  - *to-do*: wenn Υ stetig diff'bar, dann:

$$\boldsymbol{L(\Upsilon) = \int_a^b \|\Upsilon'(\mathrm{t})\|_2\, dt}$$

wobei (falls $n = 2$):

$$\|\Upsilon'(\mathrm{t})\|_2 = \sqrt{\Upsilon_1'(t)^2 + \Upsilon_2'(t)^2}$$

(Abstand zweier Punkte), d. h. ef. alle Υ_n ableiten und dann Stafu zum Integral finden.

Bsp.: Bogenlänge von $y = x^2$ mit $x \in [0,b], b > 0$,
d. h. $\Upsilon\colon [0,\mathrm{b}] \to \mathbb{R}^2, \Upsilon(\mathrm{t}) \coloneqq (t,t^2)$

1. Ableitungen berechnen:
$$\Upsilon'(\mathrm{t}) = (1, 2t)$$
2. $\|\Upsilon'(\mathrm{t})\|_2 = \sqrt{1+4t^2}$
3. Integral berechnen:

$$L(\Upsilon) = \int_0^{2b} \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_0^{2b} \frac{1}{2}\sqrt{1+s^2}\,ds$$

- **Krümmung** bei C^2-Kurve (falls in t regulär):

$$\kappa(\mathrm{t}) = \frac{\Upsilon_1'(t) * \Upsilon_2''(t) - \Upsilon_2'(t) * \Upsilon_1''(t)}{(\|\Upsilon'(t)\|_2)^3}$$

also einfach 1. und 2. Abl. der Υ_n bilden + Nenner s.o.

Partielle Ableitung: Immer nur nach einer Komponente ableiten, z. B. $\partial_1 f(x)$ ist partielle Abl. 1. Ordnung nach x_1, wobei $x_n, n \neq 1$ wie Konstante behandelt wird/werden. $\partial_{12} = \partial_1\big(\partial_2 f(x_1,x_2)\big)$ (erst nach x_2, dann x_1) zu Hesse-Matrix $\begin{pmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{pmatrix}$.

Beispiel: $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

1. **Gradient**:

$$\left.\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= 3x^2 - 3y \\ \partial_y f(x,y) &= 3y^2 - 3x \end{aligned}\right\} \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung $\partial_v f(x,y)$ in Richtung v (*falls verlangt!*) $= \langle \nabla f(x,y), v \rangle$, d. h. ***Skalarprodukt*** von Gradient mit v: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

2. **Kritische Punkte** (**Extrema**) von f sind Punkte c, wo $\nabla f(c) = 0$ gilt: Löse LGS mit „Zeilen des Grad." $= 0$:

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3y = 0 \quad &\Rightarrow x^2 = y \\ 3y^2 - 3x = 0 \quad &\Rightarrow y^2 = x \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. **Hessematrix**: *zweimal stg. differenzierbar*

$$\left.\begin{aligned} \partial_{xx} f(x,y) &= 6x \\ \partial_{yx} f(x,y) &= -3 \\ \partial_{xy} f(x,y) &= -3 \\ \partial_{yy} f(x,y) &= 6y \end{aligned}\right\} \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrizen der kritischen Punkte:

$$\mathrm{A} \coloneqq \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B} \coloneqq \nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

(Keine? Mit allg. Hesse-Matrix weitermachen!)

4. **Charakteristische**(s) **Polynom**(**e**) aufstellen:

$$\chi_{\nabla^2 f(x,y)}(\lambda) = \chi_\mathrm{A}(\lambda) = \det(A - \lambda * I_n)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 9$$

$$\chi_\mathrm{B}(\lambda) = \lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda - 3)(\lambda - 9)$$

Hilfe **Determinante**: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - g \cdot e \cdot c - h \cdot f \cdot a - i \cdot d \cdot b$$

5. Nullstellen der char. Polynome sind Eigenwerte.
   Prüfe EWs für jeden (kritischen) Punkt x:
   → alle EW > 0 ⇒ positiv definit ⇒ x ist **Minimum** (i.)
   → alle EW < 0 ⇒ neg. definit ⇒ x **Maximum** (isoliert)
   → mind. ein pos. und mind. ein negativer ⇒ indefinit
   ⇒ x ist **Sattelpunkt**
   → mind. einer ist 0 ⇒ keine Aussage möglich

   5.1 zu A: EW 3 und -3 (aus χ_A) ⇒ $(0,0)$ ist Sattelpkt.
   5.2 zu B: EW 3 und 9 (aus χ_B) ⇒ $(1,1)$ lokales Mini.

Jacobi-Matrix: $F(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}, G(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ \sin(y_1+y_2) \end{pmatrix}$
dann alles *partiell ableiten* (bei F z. B. erst nach $x_1 \Rightarrow \binom{1}{0}$):

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \end{pmatrix}, DG(y) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ \cos(y_1+y_2) & \cos(y_1+y_2) \end{pmatrix}$$

dann: $D(G \circ F)(x) = DG\big(F(x)\big) * DF(x)$, also $\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \end{pmatrix}$ für y_1 und y_2 in DG einsetzen und Matrixmult. von Ergebnis mit DF.

Heruntergeladen von Studydrive